沪科版《数学》内容解读

——任课教师的教学参考资料

胡涛　徐子华　吴之季　编

上海科学技术出版社

沪科版《数学》内容解读

——任课教师的教学参考资料

胡涛、徐子华、吴之季　编

上海科学技术出版社

目　录

Contents

第一部分

数 与 代 数

一、数与式

$$\text{实数}\left\{\begin{array}{l}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{array}\right.$$

$$\text{代数式}\left\{\begin{array}{l}\text{有理式}\left\{\begin{array}{l}\text{整式}\\ \text{分式}\end{array}\right.\\ \text{无理式(包括根式)}\end{array}\right.$$

（一）有理数（第一章）

1. 正负数概念的引出

成书于公元一世纪的我国最古老的数学书《九章算术》，它的第八章《方程》内容是讲解一次方程组的. 它给出一次方程组的普遍解法，解时为要消去某一元，往往会碰到以小数减去大数的情形，书中明确地引入负数.

教科书在第一章有理数减法中，有一例：$2-7=?$ 和习题中一题：求式中 x 值 $6+x=4$，正是想让学生体会到由于运算需要而引入负数的.

《方程》一章，还进一步通过例题及解法，具体规定什么是正、什么是负. 如该章第八题：

“今有卖牛二、羊五，以买十三豕，有余钱一千. 卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足. 卖羊六、豕八，以买五牛，钱不足六百. 问牛、羊、豕价各几何？”

“术曰：如方程，置牛二、羊五正，豕十三负，余钱数正；次置牛三正，羊九负，豕三正；次置牛五负，羊六正，豕八正，不足钱负. 以正负术入之.”

这里，明确给出“卖”（收入）是正，“买”（支出）是负，“余钱”是正，“不足钱”是负.

7世纪时印度数学家也开始使用负数来表示负债.对负数的认识在欧洲却进展缓慢,甚至到16世纪韦达的著作还回避使用负数.而我国在两千多年前不但认识了负数,规定表示负数的方法,指出负数的实际意义,并运用到解方程之中,真是世界数学史上一大光辉成就.

2. 对有理数乘法法则的认识

有理数乘法的法则是:两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘;任何数与零相乘仍得零.

这个法则是因数学本身需要,作出的规定(也称为乘法的定义).

为什么有这样的规定呢?

数学是研究现实世界中空间形式和数量关系的科学.数是最基本的研究对象,人类在长期实践中创造了数.首先是自然数(正整数和零),以后添加分数、负数等,构成了有理数,再次引出无理数使数系扩充到实数.

在数系的扩充中,把数集 A 扩充到数集 B 时,必须遵从下列原则:

(1) $A \subset B$,即 A 是 B 的真子集.

(2) A 中不是永远可以实施的某些运算,在 B 中永远可以实施(引入分数,使除法可以实施;引入负数使减法可以实施;引入无理数使开方、求超越函数值可以实施.可见数集的扩充是逐步地进行的),这也正是扩充的目的.

(3) A 的元素间所定义的基本运算和关系,在 B 的元素间也有相应的定义,且 B 的元素间的这些运算与关系对于 B 中 A 的元素来说,与原来 A 的元素间的运算和关系是一致的,即无矛盾性.

以上关于"数系扩充的原则"的资料选摘自湖南教育出版社出版的《初等数学研究教程》.

我们的教科书,在给出有理数乘法法则时,没有直接说是"规定"或说是"定义".而是根据上述原则精神,由自然数乘法逐步引导,让学生在类比中归纳得出的(弗洛登塔尔称为归纳外推法).从而让学生了解这样规定的合理性.

教学时,建议按下面方式进行,比较自然:正整数乘法是相同加数连加的简便算法,如

$$(+2)\times(+3)=(+2)+(+2)+(+2)=+6.$$

由于有理数包括了自然数,因此,有理由希望有理数中乘法应是自然数集中乘法的自然推广(包括乘法中原有的交换律、结合律、分配律以及单位元、零元素等的规定都应适用).

因此,类比上述算法,有$(-2)\times(+3)=(-2)+(-2)+(-2)=-6$,

$$(-2)\times(+2)=(-2)+(-2)=-4,$$
$$(-2)\times(+1)=-2,$$
$$(-2)\times 0=0.$$

上述四个式子得出后,让学生比较归纳:(1) 一个负数与一个正数相乘,有什么发现?(2) 两数相乘时,当其中一个因数逐次减少1时,积有什么变化?

接着摆出下列算式：

$$(-2)\times(-1)=\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$(-2)\times(-2)=\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$(-2)\times(-3)=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

让学生按上面第(2)条得出的规律，填写答案，并回答“你对两个负数相乘有什么发现?”

然后，根据上面两段算式，归纳得出有理数乘法法则.（本书第一章就介绍有理数，书中由温度升降；时间的前后不易说清理由，可以略去）

附录：

如果教材在加减混合运算时，介绍了加法交换律、结合律，同时，也说明乘法交换律、结合律、分配律也适用. 那么，在说明乘法法则的理由时，可按如下算法进行(原来教育部批准的项武义先生参与编写的教材就是这样处理的)(本书在加法时未介绍分配律，乘法还没讲，怎么就用分配律呢? 故采用上面讲法).

记数 a，b 均大于 0，

因为 $$b+(-b)=0 \quad \text{(相反数定义)}$$

由 $$\begin{aligned} a\cdot b+a(-b) &= a[b+(-b)] \quad \text{(分配律)} \\ &= a\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

可见 $a(-b)$与 ab 互为相反数.

故应有 $a(-b)=-ab$.

又由于 $$\begin{aligned} (-a)b+(-a)(-b) &= (-a)[b+(-b)] \\ &= (-a)0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

可见$(-a)(-b)$与$-ab$ 互为相反数.

故有 $(-a)(-b)=-(-ab)=ab$.

比较上面两段算式，归纳得出有理数乘法法则.

3. 近似数的四则运算法则

(1) 近似数加减：各个运算数据以小数位数最少的数据为准，其余各数据可多取一位小数，但最后结果应与小数位数最少的数据的数位相同. 如：

$$\begin{aligned} &2\,643.0+987.7+4.187+0.235\,4 \\ =&2\,643.0+987.7+4.19+0.24 \\ =&3\,635.13 \\ \approx&3\,635.1. \end{aligned}$$

(2) 近似数乘除：各个运算数据以有效数字位数最少的数据的位数为准，其余各数据要比有效数字位数最少的数据多取一位数字，但最后结果应与有效数字位数最少的数据的位数相同. 如：

$$
\begin{aligned}
&0.023\times 26.64\times 2.067\,83\\
=\ &0.023\times 26.64\times 2.068\\
=\ &1.27\\
\approx\ &1.3.
\end{aligned}
$$

（二）实数(第六章)

1. 实数的定义

我们教科书上是这样引入的：有理数包括整数和分数，整数和分数可统一写成分数形式，也就是说，有理数总可写成$\frac{n}{m}$(m，n 是整数，且 $m\neq 0$) 的形式.

任何整数和分数都可以化为有限小数或无限循环小数. 反过来，任何有限小数和无限循环小数都可以写成分数，因此有理数是有限小数或无限循环小数.

还有一些数如 $\sqrt{2}$，π 是无限不循环小数，称之为无理数.

有理数和无理数统称为实数.

2. 实数集的基本性质

(1) 有序性. 有序性是指“全序性”和“传递性”.

① 全序性. 任何两个实数 α，β，总可比较大小，即在 $\alpha<\beta$，$\alpha=\beta$，$\alpha>\beta$ 三种关系中，有且仅有一种成立.

② 传递性. 如果 $\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$ 则 $\alpha<\gamma$.

(2) 稠密性. 无论 $\alpha<\beta$ 是怎样的两个实数，总存在另一个实数 γ，使得 $\alpha<\gamma<\beta$.

(3) 阿基米德性质. 若给定任意两个正实数 α，β，那么永远有这样的自然数 n，使得 $n\alpha>\beta$.

(4) 连续性. 前面的三条基本性质：有序性、稠密性、阿基米德性质对于有理数集也同样成立. 但“连续性”是有理数集所没有的，正是这个性质反映实数集与有理数集的本质区别.

实数集的连续性的描述方式有多种，因此，引入无理数的方式以及实数的定义也必然有多种. 下面介绍不同的描述实数集连续性的 7 种方式(包括实数定义).

3. 实数的几种不同定义

(1) 戴德金方法. 设将全体有理数所成的集合分拆为两个非空的集合 A 和 B，使得：每

一个有理数必在且在 A 及 B 之一中；且集 A 内任一数小于集 B 中的任一数，则称这样的分拆为一个有理数分划，记为 $A|B$，其中 A 称为分划下组，B 称为分划上组.

可以推断，有理数分划有以下三种类型：

① 在下组 A 内有最大数 r，而在上组 B 内无最小数.

② 在下组 A 内无最大数，而在上组 B 内有最小数 r.

③ 在下组 A 内无最大数，同时在上组 B 内也无最小数.

在前两种情形中，r 是 A 组与 B 组之间的界数，称分划 $A|B$ 产生了有理数 r.

任一类型③的有理数分划 $A|B$ 定义一个新数，称为无理数.

凡是说到定义有理数 r 的分划时，总是指第②类型，即把有理数 r 算在上组 B 内，这时说这种分划下组是开的，而上组是闭的.

定理 1 （戴德金） 由有理数所组成的每个具有开的下组的分划确定一个实数，记作 $\alpha = A \mid B$.

实数包括了有理数和无理数.

（2）康托方法. 若闭区间序列：

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], [\alpha_3, \beta_3], \cdots, [\alpha_n, \beta_n], \cdots$$

满足下列两个条件时，则称之为区间套：

前一个包含后一个，即

$$[\alpha_1, \beta_1] \supseteq [\alpha_2, \beta_2] \supseteq [\alpha_3, \beta_3] \supseteq \cdots \supseteq [\alpha_n, \beta_n] \supseteq \cdots$$

而对任意 n 与自然数 p 都有：$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+p} \leqslant \beta_{n+p} \leqslant \beta_n$.

区间长度序列

$$\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \beta_3 - \alpha_3, \cdots, \beta_n - \alpha_n \cdots$$

当 $n \to \infty$ 时趋向于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$.

定理 2 （康托） 若闭区间序列 $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], [\alpha_3, \beta_3], \cdots, [\alpha_n, \beta_n], \cdots$ 构成区间套，则存在唯一实数 r，属于一切区间，即对一切 n，都有 $\alpha_n \leqslant r \leqslant \beta_n$.

教科书在《实数》这节开始，对 $\sqrt{2}$ 进行研究，正是按康托的这个思路进行的.

采取逐次提高精确度，以 $\sqrt{2}$ 的不足近似值和过剩近似值为端点，构建闭区间序列：

$$[1, 2] \supset [1.4, 1.5] \supset [1.41, 1.42] \supset [1.414, 1.415] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \cdots$$

这些闭区间的长度，逐渐缩小 $2-1=1$，$1.5-1.4=0.1=\frac{1}{10}$，$1.42-1.41=0.01=\frac{1}{10^2}$，$1.415-1.414=0.001=\frac{1}{10^3}$，$\cdots \lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$. 如图 1-1 所示这个过程可以在数轴上直观表示出来：

图 1－1

故存在唯一实数 r,属于所有闭区间,这个 $r=\sqrt{2}$.

(写这些,希望在讲 $\sqrt{2}$ 时,至少可用数轴直观地让学生了解这个思路)

(3) 柯西方法. 有理数列 $\{a_n\}$,若对任意 $\varepsilon>0$,存在序号 N,当 $n>N$ 时,对任意自然数 p,不等式 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 都成立,称数列 $\{a_n\}$ 为基本有理数列.

定理 3 (柯西) 对于每一个基本有理数列,都存在一个实数作为它的极限.

(4) 单调有界的有理数列,一定有一个实数作为它的极限.

(5) 用确界来定义实数. 一个非空的上方有界的有理数集 A 称为实数,记作 $\alpha=\sup A$.

(6) 用无限小数来定义实数(如我们教科书上那样).

(7) 用公理组来定义实数.

以上前六种实数的定义,有一个共同的特点,就是首先引入实数系的元素——实数,然后建立实数系本身. 而第七种定义却是先定义实数系 $\mathbf{R}$,然后把集合 $\mathbf{R}$ 中的元素称为实数. 给出这种定义的方法是:给出一组表达集合 $\mathbf{R}$ 是完备的阿基米德有序域的公理,称满足这组公理的集合 $\mathbf{R}$ 为实数域(系),并称 $\mathbf{R}$ 中的元素为实数. 例如:

设在集合 $\mathbf{R}$ 上定义了"加法＋"和"乘法·"以及"不等关系≤、≥"并满足以下四组公理:

① $\mathbf{R}$ 是一个域. 即:

1) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

2) $x+y=y+x$;

3) 存在一个元素 $0\in\mathbf{R}$,使得 $0+x=x$;

4) 对于每个元素 $x\in\mathbf{R}$,存在一个元素 $-x\in\mathbf{R}$, 使得

$$x+(-x)=0;$$

5) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$;

6) $x\cdot y=y\cdot x$;

7) 存在一个元素 $1\neq 0$, $1\in\mathbf{R}$ 使得 $1\cdot x=x$;

8) 对于每一个元素 $x\in\mathbf{R}$,存在一个元素 $x^{-1}\in\mathbf{R}$,使得 $x\cdot x^{-1}=1$;

9) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$;

② $\mathbf{R}$ 是一个有序域. 即:

1) 在任意两个元素 x, y 之间有且仅有下列关系之一:

$$x=y,\quad x>y,\quad x<y;$$

2) 如果 $x>y$, $y>z$,则 $x>z$;

3）如果 $x \leqslant y$，则 $x+z \leqslant y+z$；

4）如果 $0 \leqslant x$ 且 $0 \leqslant y$，则 $0 \leqslant x \cdot y$；

③ **R** 是阿基米德有序域. 这意味着满足阿基米德公理：对于任意两个元素 $0<x$，$0 \leqslant y$，必存在正整数 n，使得

$$y \leqslant n \cdot x;$$

④ **R** 是完备域. 例如，**R** 满足闭区间套公理：任一闭区间套$\{[a_n,\ b_n]\}$，对于任意 n 有 $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ 有非空交，则称 **R** 为实数域(系)，并把 **R** 中的元素称为实数.

实数的严格理论是到了十九世纪后半叶才确立的. 当时，从事这项工作的有康托尔，梅林(Melline)，韦尔斯特拉斯和戴德金等. 他们差不多是同时得到了无理数理论，梅林先于康托尔，但两者的结果简直是一样的. 即上述第三种定义. 而韦尔斯特拉斯于 1860 年把无穷多个有理数组成的集合——整体来作为一个新数. 戴德金的实数定义却别具一格，被当时的数学界称为人类智慧的创造物. 它的最大优点是具有"一义性"，即不同的分划定义了不同的无理数. 并且由于这种实数的定义和直线的连续性公理互相呼应. 所以，这种实数理论特别简洁明了，实非其他各家所能比拟的.

近代数学的飞速发展，使得实数系只是抽象空间的一个具体模型和例子，因此，为了更快地进入一般空间的讨论，直接用一组公理来引入实数系如定义(7)，而不纠缠在那些四则运算的定义和讨论上是十分必要的.

以上资料选摘自下列书籍：

上海教育出版社出版，张镜清、霍纪良编《实数》和人民教育出版社出版，吴振廷编《实数理论及其在中学数学中的应用》.

4. 为什么在七(下)一开始就介绍《实数》(第六章)呢?

(1) 在这章之前，"整式加减"(第二章)"一次方程与方程组"(第三章)涉及的都是在有理数集内的运算.

(2) 这章之后，第七章"不等式与不等式组"的解集就是区间了，而区间是指其中的一切实数.

八上第十二章"一次函数"中，它的定义域、值域，一般是实数(或其中部分). 从而才能保证描出的点，可以用连续的线连结. (当然不必向学生讲)这里需要指出的是，在画函数图象时，为了在坐标纸上描点方便，列表时常只列出一些整数点. 教学时应向学生说明，并可适当补充几个带小数的点.

(3) 上面说到的解不等式、研究函数时，虽涉及实数，但并不进行因开方而出现的实数的运算. 所以没有把"二次根式"放在前面实数一起，而作为第十六章放在八(下)，紧接着，第十七章"一元二次方程"、第十八章"勾股定理"，才会遇到以根式形式出现的实数运算. 直至九(上)"二次函数""解直角三角形"同样会遇到准确的实数值的计算.

关于二次根式，2011 版新课标上，是把它放在"实数"总标题下，而不是放在"代数式"标

题下.并且明确提出:“了解二次根式、最简二次根式的概念,了解二次根式(根号下仅限于数)加、减、乘、除运算法则,会用它们进行有关的简单四则运算”.课标附例 48 中还补充:“不要求进行根号下含字母的二次根式的四则运算,如 $\sqrt{a^3b}$, $2\sqrt{a}\sqrt{b}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ 等.”可见,课标是把“二次根式”作为实数运算的特例安排的,不必作为无理式对待.

(三)整式与分式

1. 整式加减(第二章)

(1) 这部分内容中,学生容易出错的是去括号法则.为便于学生在理解基础上更好地掌握,课本早就为此做了准备:在第一章有理数中,习题 1.4 安排了第 4 题如下:

分别计算下列每题中的两个算式,比较结果,有什么体会?

① $(1-2)+(3-4)-(-5+6)$, $\quad 1-2+3-4+5-6$;

② $-(8-12)+(-16+20)$, $\quad -8+12-16+20$;

③ $\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(-\dfrac{5}{3}+\dfrac{3}{2}\right)$, $\quad \dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}+\dfrac{3}{2}$.

接着,在本章前一小节习题 2.1 中还安排了第 8 题如下:

将 $a=-8$, $b=3$, $c=2$, $d=-4$ 分别代入 $(a-b)-(c-d)$ 和 $a-b-c+d$ 两个式子,计算结果,看看它们是否相等?再任给 a, b, c, d 若干组你喜欢的值,代入上面两个式子中,计算结果.从中你能得到什么结论?

因此,当本节讲到为了要计算 $(2ab-\pi r^2)-(ab-\pi r^2)$,需先去括号时,应及时提问学生,回忆前面两次做过的题目后,有什么体会?

学生在回忆上面做过的题目中,意识到去括号的规律后,建议结合下面的例子:

$$\begin{aligned}&+(a+b-c)\\&=(+1)\times(a+b-c)\\&=a+b-c,\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}&-(a+b-c)\\&=(-1)\times(a+b-c)\\&=-a-b+c,\end{aligned}$$

说明去括号的实质是按分配律运算的结果.

(2) 为什么要强调去括号的实质是按分配律运算的结果呢?因为去括号的法则是依据上面两个例子归纳的.当遇到如下例子时怎么办呢?

例:计算:$2(5a-2b)-3(2a-b)$

一种方法是转化为上述情况:

$$2(5a-2b)-3(2a-b)=(10a-4b)-(6a-3b)=10a-4b-6a+3b=4a-b.$$

另一种方法是直接按分配律计算:

$$2(5a-2b)-3(2a-b)=10a-4b-6a+3b=4a-b.$$

2. 整式乘法与因式分解(第八章)

(1) 本章重点是幂的运算四条基本性质.其中为了在幂指数扩展后,运算法则仍然有效,所以定义了 $a^0=1\ (a\neq 0)$,$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ (a\neq 0, n$ 为正整数).

(2) 关于多项式乘法,2011版课标明确提出:“能进行简单的整式乘法运算(其中多项式相乘仅指一次式之间以及一次式与二次式相乘).”所以,在课本的多项式乘法一节中,安排了如下的例、习题.计算:$(a+b)(a^2-ab+b^2)$,$(x-y)(x^2+xy+y^2)$,等.借机介绍了立方和差.为什么呢?因为高一数学一开始研究函数时,讲到奇函数,一般都选最简单的立方抛物线 $y=x^3$.这个函数的奇偶性很容易说明,当研究它的单调性时,就要用到立方差公式了.

当 $x_2>x_1>0$ 时,$y_2-y_1=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)$

由于 $x_2>x_1>0$,所以 $x_2-x_1>0$,$x_2^2+x_2x_1+x_1^2>0$,故 $y_2-y_1>0$,即 $y_2>y_1$.

(3)“完全平方公式与平方差公式”课标上提出“能推导乘法公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,了解公式的几何背景”.

在学过多项式乘法之后,对于这三个公式的推导并不难.因此,课本对$(a\pm b)^2$ 公式是让学生自己去推导的.只是在得出结论后,突出这两个公式实质应只是一个.因为$(a+b)^2$ 公式中 b 是可正可负的.至于$(a+b)(a-b)$公式是让学生在计算几个特例后,自己抽象归纳得出的.

由于考虑到三个公式的几何背景的呈现,课本才采用先讲$(a\pm b)^2$,而后再讲$(a+b)(a-b)$的.为什么呢?因为$(a+b)^2$ 的图形,在前面介绍多项式乘法时,就已经出现了$(a+b)(m+n)$的图形(图 1-2),这里只要将 m 换成 a,n 换成 b 即可.得到正确的$(a+b)^2$ 图形后,引导学生回忆七(上)第四章学过的线段和、差的意义及如何用尺规作出它们,启发学生从类比中作出$(a-b)^2$ 的图形.这两个图形课本上已经给出了,是让学生在自己主动得出后的验证用.$(a+b)(a-b)$的公式不仅没有给,而且连图形也没有给,是希望检测学生在作出上面两个图形过程中是否真正理解了两线段的和与差.因为这个公式中既要作出两线段的和,又要作出两线段的差(图 1-3).

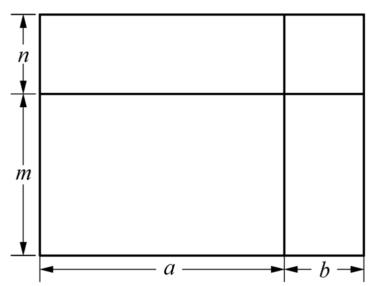

图 1-2

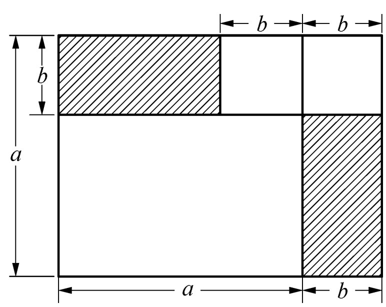

图 1-3

当然,$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的几何图形,还可以按从右边推导出左边来设计.

(4) 因式分解. 课标提出:“能用提公因式法、公式法(直接利用公式不超过两次)进行因式分解(指数是正整数).”

课本在讲用公式法进行因式分解时,除有直接一次用公式外,还安排了如下的例及习题:

把下列各式分解因式:

① $x^2-y^2+ax+ay$;　　　　　　　　② $a^2+2ab+b^2-c^2$.

解此题,就要两次直接用公式了.

因式分解是为下章分式及八(下)解一元二次方程做准备的. 由于分式及一元二次方程都不会出现繁难的类型,所以因式分解要求不高.

3. 分式(第九章)

(1)“分式”这一章,从定义到性质到运算都是通过类比分数的相关内容引入的. 教学时应让学生主动阅读、思考予以解决.

由于乘除,只需根据分式性质会约分即可,而加减还需先通分,故课本先安排乘除,然后才讲加减.

(2) 整式运算,课标上只有加、减、乘三种运算,没有提除法. 课本在单项式与单项式相乘、多项式与单项式相乘时,顺便提到除法. 至于多项式与多项式相除一直没有提. 课标不单独列出多项式除法. 因为根据分式的定义,分式其实就是两个整式相除的表述形式. 因此建议在讲过分式定义与基本性质之后,紧接着直接指导学生做如下除法:

计算:① $32x^5y^3\div 8x^3y$,　　　　　② $(6x^3y^2-18x^2y^3+9x^2y^2)\div 3x^2y^2$,

　　③ $(6x^2+14x+4)\div(3x+1)$,　　　④ $(2x^3+x^2+5x-3)\div(x^2+2)$.

这些题目写成分式之后,直接约分即得结果. 这样,突出了在整式乘法与因式分解之后,接着就讲分式的优越性,更有利于对课标关于处理除法的理解.

附录:

1. 多项式的除法

我们已经学过多项式除以单项式,但多项式除以多项式,如 $(14x+4+6x^2)\div(3x+1)$,该怎么计算呢? 让我们像整数除法那样,采用竖式来试试.

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x+4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{商} \\
\text{除式}\cdots\cdots 3x+1 & \overline{)\,6x^2+14x+4}\cdots\cdots\text{被除式} \\
 & \underline{6x^2+2x} \\
 & \phantom{6x^2+{}}12x+4 \\
 & \phantom{6x^2+{}}\underline{12x+4} \\
 & \phantom{6x^2+12x+{}}0\cdots\cdots\text{余式}
\end{array}
$$

这样做时,首先要将被除式与除式按同一个字母降幂排列. 被除式有缺项时要补 0 或留

足缺项.然后用除式第一项($3x$)除被除式第一项($6x^2$)得商的第一项($2x$);用商的第一项($2x$)去乘除式,把所得的积($6x^2+2x$)写在被除式下面(同类项对齐),以被除式减去这个积,得 $12x+4$;把 $12x+4$ 当作新的被除式,再按上面方法继续计算,直到余式等于 0,或余式次数低于除式为止.

例 1 计算:$(2x^3+x^2+5x-3)\div(x^2+2)$.

解

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2x & +1 & & \\ \cline{2-5}
x^2+2\,\big) & 2x^3 & +x^2 & +5x & -3 \\
 & 2x^3 & & +4x & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +x & -3 \\
 & & x^2 & & +2 \\ \cline{2-5}
 & & & x & -5
\end{array}
$$

学了分式后,整式除法可表示成分式.然后可再根据分式基本性质化简就可以了.如

(1) $(6x^2+14x+4)\div(3x+1)$

$$=\frac{6x^2+14x+4}{3x+1}=\frac{(2x+4)(3x+1)}{3x+1}=2x+4,$$

(2) $(x^3-8y^3)\div(x-2y)$

$$=\frac{x^3-8y^3}{x-2y}=\frac{(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)}{x-2y}$$

$$=x^2+2xy+4y^2,$$

(3) $(2x^3+x^2+5x-3)\div(x^2+2)$

$$=\frac{2x^3+x^2+5x-3}{x^2+2}=\frac{2x^3+4x+x^2+2+x-5}{x^2+2}$$

$$=\frac{2x(x^2+2)+(x^2+2)+(x-5)}{x^2+2}$$

$$=2x+1+\frac{x-5}{x^2+2}.$$

练　习

1. 计算:

(1) $(3x^2+14x-5)\div(x+5)$;

(2) $(1+x^2+x^4)\div(x^2+1-x)$.

与数的除法一样,式的除法也有:

被除式=除式×商式+余式.

如由例 1,可得

$$2x^3+x^2+5x+3=(x^2+2)(2x+1)+(x-5).$$

一般地，对于一元多项式来说，$f(x)$除以 $g(x)$得商式为 $Q(x)$、余式为 $R(x)$，那么，它们之间有关系式：

$$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x),$$

这里 $R(x)$是一个比 $g(x)$次数低的多项式.

特别，当 $R(x)=0$ 时，$f(x)=g(x)\cdot Q(x)$，就是 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除.

例 2 求 $f(x)=2x^3+3x-1$ 除以 $g(x)=x-4$ 的商式及余式.

解法一 仿照例 1 用竖式计算，请同学自己完成.

解法二 设所求商式为 $Q(x)$、余式为 $R(x)$.

因为 $f(x)$是三次式，$g(x)$是一次式，因而 $Q(x)$一定是二次式，$R(x)$的次数低于一次，即为常数. 因此，我们可设 $Q(x)=ax^2+bx+c$，$R(x)=d$，这里 a，b，c，d 都是要确定的系数.

根据上述除法基本关系等式，应有

$$2x^3+3x-1=(x-4)(ax^2+bx+c)+d.$$

把两边按字母 x 的降幂排列，得

$$2x^3+0\cdot x^2+3x-1=ax^3+(b-4a)x^2+(c-4b)x+(d-4c).$$

上式等号两边的两个多项式，当变量 x 同取任一个值时都相等. 因而，这两个多项式应是同一个多项式，即各同类项的系数一定相等.

于是，比较等号两边同类项的系数，得

$$\begin{cases}a=2,\\ b-4a=0,\\ c-4b=3,\\ d-4c=-1.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=2,\\ b=8,\\ c=35,\\ d=139.\end{cases}$$

∴ 所求商式 $Q(x)=2x^2+8x+35$，余式 $R(x)=139$.

这里，用到了待定系数法.

练　习

用待定系数法，求 $f(x)$除以 $g(x)$的商式及余式：

(1) $f(x)=2x^2+23x+54$，$g(x)=2x+7$；

(2) $f(x)=2x^3+27x-5$，$g(x)=x-3$.

2. 余数定理

在上面的例 2 中，把 $x=4$ 代入 $f(x)$中求值，得 $f(4)=2\times4^3+3\times4-1=139$. 这正

好是 $f(x)$除以 $x-4$ 的余数. 这是一个偶然现象呢？还是普遍性规律呢？让我们对一般问题进行研究.

设一元多项式 $f(x)$除以 $x-a$，得商式 $Q(x)$，余数为 R，那么有

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R.$$

这个等式对不论 x 取何值总是成立的. 取 $x=a$ 代入，得

$$f(a)=(a-a)\cdot Q(a)+R，即 R=f(a).$$

这样，我们得到一个定理.

余数定理　一元多项式 $f(x)$除以 $x-a$ 所得的余数等于 $f(a)$.

例 3　已知 $f(x)=x^3+2x^2+4x+1$，求 $f(x)$ 除以 $x+2$ 所得的余数.

解　$\because x+2=x-(-2)$，$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2+4\times(-2)+1=-7$，

$\therefore$ $f(x)$除以 $x+2$ 的余数 $R=-7$.

请你用竖式除法再算一次看看.

例 4　求 a^3-b^3 除以 $a-b$ 所得的余数.

解　把 a^3-b^3 看作是 a 的多项式，其中 b 看作常数，并记 $f(a)=a^3-b^3$.

$\because$ $f(b)=b^3-b^3=0$，

$\therefore$ $f(a)$除以 $a-b$ 所得余数 R 为 0.

即 a^3-b^3 能被 $a-b$ 整除，也可以说 $f(a)$有因式 $a-b$.

上面的例 4 反映了一元多项式 $f(x)$有如下的性质：

推论　如果 $f(a)=0$，那么 $x-a$ 必能整除 $f(x)$，或者说 $f(x)$ 必有因式 $x-a$；反过来，如果 $x-a$ 能整除 $f(x)$，那么 $f(a)=0$.

这个推论通常叫做**因式定理**.

例 5　证明 a^6+b^6 不能被 $a\pm b$ 整除.

证明　$f(a)=a^6+b^6$.

$\because$ $f(b)=b^6+b^6=2b^6\neq 0$，$f(-b)=(-b)^6+b^6=2b^6\neq 0$，

$\therefore$ 据因式定理，$f(a)=a^6+b^6$ 不能被 $a\pm b$ 整除.

练　习

1. 设 $f(x)=x^4-5x^2+20x-8$，求 $f(x)$ 除以以下各式的余数：

(1) $x-1$；　　　　(2) $x+1$.

2. 如果 $f(a)=a^3+b^3$，证明 $f(a)$ 不能被 $a-b$ 整除.

3. 已知除式、商式及余式，求被除式：

(1) 除式 $=3x-5$，商式 $=2x+7$，余式 $=10$；

(2) 除式 $=-2x^2-x+1$，商式 $=x^2-2$，余式 $=3x+7$.

4. 如果 $f(x)=2x^3-x^2+mx+n$ 含有因式$(x+2)(x-4)$，求 m，n 的值.

5. 分解因式：

$$x^3-7x+6.$$

6. 如果 $f(x)=ax^2+bx+c$ 能被 $x+1$ 整除，且被 $x-2$ 与 $x+2$ 除时分别余 2，-3. 试求 $f(x)$的表达式.

（四）二 次 根 式

“二次根式”安排在第十六章. 课标对这部分内容的要求，以及为什么放在这里，在前面“实数”部分，已作了详细说明.

二、方程与不等式

$$
\text{方程}\begin{cases}\text{整式方程}\begin{cases}\text{一元一次方程}\\\text{一元二次方程}\end{cases}\\\text{分式方程}\end{cases}\qquad\text{一次方程组}\begin{cases}\text{二元一次方程组}\\\text{三元一次方程组}\end{cases}
$$

不等式——一元一次不等式——两个一元一次不等式组成的不等式组

（一）一次方程与方程组(第三章)

(1) 等式基本性质中,除了等式两边同时加(减)、乘(除)同一个整式这样性质外,还列入了等式的对称性和传递性.

为什么要列入这两项呢? 如等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,既可看作乘法,又可看作因式分解,即等式对称性. 又如 $\angle A=30^\circ$, $\angle B=\angle A$, $\therefore \angle B=30^\circ$. 这在欧氏几何中注"等量代换"(这在原欧氏几何中是五条公理的第一条),现在几何中没有列这一公理. 因此,列入等式传递性. 其实等式的两边同时加(减)同一个整式这个性质,也是原欧氏几何五条公理中的两条.

(2) 一次方程组(又称线性方程组),在中学主要强调是用代入消元法和加减消元法来解的. 课本中对二元一次方程组正是这样做的. 对三元一次方程组,当然完全可以这样做. 课本中三元一次方程组解法的第 1 个例子,也按加减消元法去解的. 这样做的好处是,让学生体会到把解三元一次方程组转化为解二元一次方程组,再把解二元一次方程组转化为解一元一次方程,即把要解决的问题,逐步变换为我们已经解决了的问题.

(3) 三元一次方程组解法中的第 2 个例子提供了一种新的消元方法. 下面就来说清这个方法的过程和原理.

例 解下列线性方程组

$$
\begin{cases}2x+2y-z=6,\\x-2y+4z=3,\\5x+7y+z=28.\end{cases}
$$

解 将第一、第二两个方程位置对调，得：

$$\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 2x+2y-z=6, \\ 5x+7y+z=28. \end{cases}$$

将第一个方程的 -2 倍加到第二个方程上；将第一个方程的 -5 倍加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 6y-9z=0, \\ 17y-19z=13. \end{cases}$$

将第二个方程乘以 $\frac{1}{6}$；将第二个方程的 $-\frac{17}{6}$ 倍加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ y-\frac{3}{2}z=0, \\ \frac{13}{2}z=13. \end{cases}$$

这样的方程组称为阶梯形方程组，从最后一个方程，得 $z=2$，再逐次代入第二、第一个方程，可以得 $y=3$，$x=1$. 从而得原方程组的解为：

$$\begin{cases} x=1, \\ y=3, \\ z=2. \end{cases}$$

分析以上消元法过程，实际上是反复对方程组进行下面三种变换：

① 用一个非零的数乘以某个方程；

② 将一个方程的 k 倍加到另一个方程上；

③ 交换两个方程的位置.

上述三种变换称为线性方程组的初等变换.

方程组的初等变换把方程组变为同解方程组，因此消元法解方程组就是通过初等变换把多元的一次方程逐步消元，从而把解求出来.

从上面例子看到，用消元法解方程组实质上是对方程组的系数进行运算. 因此，可以简化运算的表达形式，只把方程组的系数按顺序写成一个矩形的表（称作矩阵）. 例题中方程组的系数可记作：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix};\ \bar{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{bmatrix}.$$

A,$\bar{A}$分别称作方程组的系数矩阵和增广矩阵.显然,方程组的增广矩阵和线性方程组是一一对应的.对方程组作初等变换就相当于对增广矩阵作如下变换(下面是对矩阵的行进行变换):

① 用一个非零的数乘矩阵的某一行;

② 将一行的 k 倍加到另一行上;

③ 交换矩阵中两行的位置.

把上面例的解题过程,用矩阵重新写出:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1 & 6\\ 1 & -2 & 4 & 3\\ 5 & 7 & 1 & 28\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{①② 两行对调}}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 2 & 2 & -1 & 6\\ 5 & 7 & 1 & 28\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-5)\times①+③]{(-2)\times①+②}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 6 & -9 & 0\\ 0 & 17 & 19 & 13\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{17}{6}\times②+③]{\frac{1}{6}\times②}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 13\end{bmatrix}$$

最后一个矩阵称为阶梯形矩阵.得到这样矩阵即可变为前面相应的阶梯形方程组而得解了.

对上面最后得到的阶梯形矩阵,还可继续进行上述的行变换,把它变为简化阶梯矩阵.

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 13\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{2}{13}\times③}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{2\times②+①\\ (-1)\times③+①\\ \frac{3}{2}\times③+②}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

得到了简化阶梯矩阵后,可直接写出方程组的解:$\begin{cases}x=1,\\ y=3,\\ z=2.\end{cases}$

(以上摘选自(1)清华大学出版社俞正光、李永乐、詹汉生编《线性代数与解析几何》;(2)科学出版社王中良编《线性代数与解析几何》)

以上解法有固定程序,可由计算机处理,国外称之为高斯消元法.

(4)用消元法解一次方程组最早的还是我国.

世界数学史上最早的解一次方程组是我国《九章算术》第8章:"方程".这章是讲解一次方程组(线性方程组)的,它给出一次方程组的普遍解法,并且使用了负数.这在数学史上具有非常重要的意义.以该章第1题为例,看当时的解法:

"今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中和二秉,下禾三秉,实二十六斗.问上、中、下禾实一秉各几何?答曰:

上禾一秉九斗四分斗之一；中禾一秉四斗四分斗之一；下禾一秉二斗四分斗之三.”

设上、中、下禾每秉各得 x，y，z 斗，则

$$\begin{cases}3x+2y+\ \ z=39,\\2x+3y+\ \ z=34,\\\ \ x+2y+3z=26.\end{cases}\qquad (*)$$

古代是用筹来运算的，未知数不用符号表示，只将各个系数用筹依次（自上至下，自右至左）罗列出来，实际就是分离系数法，然后用类似消元法去解.

“术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方；中、左禾列如右方. 以右行上禾遍乘中行而以直除. 又乘其次，亦以直除.”

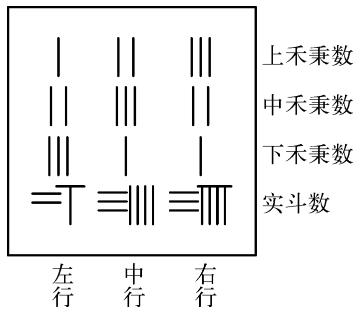

图 1-4

将（*）式中第一个方程的各个系数及常数项 3，2，1，39 列在右方（图 1-4 的右行），同样将第二个方程，第三个方程的各个系数及常数项 2，3，1，34；1，2，3，26 列在中行及左行. 用右行上禾的系数 3 遍乘中行各数得 6，9，3，102，然后两次减去右行对应各数，得 0，5，1，24. 又用 3 遍乘左行各数得 3，6，9，78，减去右行对应各数得 0，4，8，39.

“除”是相减，“直除”就是减去对应的各数、减的次数没有限定，总之减到不能再减为止. 这样做的目的，是要消去一个未知数.

经过这样的步骤，图 1-4 变成图 1-5，左行和中行相当于

$$\begin{cases}5y+\ \ z=24\\4y+8z=39\end{cases}$$

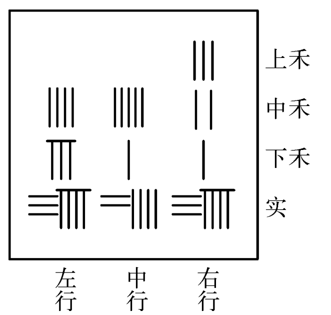

图 1-5

再消去一元就可以得到答案. 用中行中禾的系数 5 遍乘左行得 20，40，195，四次减去中行对应的数字 5，1，24 得 0，36，99，这样得到图 1-6. 左行相当于

$$36z=99.$$

$$z=\frac{99}{36}=\frac{11}{4}.$$

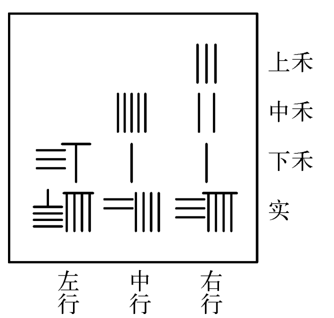

图 1-6

既解出一个未知数，用代入法就可以求出另外两个未知数来.

这是联立一次方程的普遍解法. 除了符号、术语和计算工具不同之外，和现在使用的消元法实质一样.

在国外，也有一些解线性方程组的，稍后于刘徽的丢番图和 7 世纪印度的婆罗摩及多也解过一些联立方程，但远不及

《九章算术》“方程”的算法整齐，也没有一般的解法.

至于线性方程组的完整解法，到 17 世纪末莱布尼兹才着手拟定，由此导致行列式的发明(1693). 1764 年，法国的培祖(Étienne Bézout)用行列式去建立线性方程组的一般理论.

从时间上来说，《九章算术》的解法实在是世界数学史上一大光辉成就，值得我国人自豪！

以上资料摘选自

(1) 李文林《数学史教程》.

(2) 梁宗巨《世界数学史简编》.

(二) 一元一次不等式及不等式组(第七章)

(1) 类比等式基本性质，在不等式基本性质中，也列入相应的两条：对逆性、传递性.

(2) 对于任意两个实数 a、b，如何比较它们的大小呢？一般有下面约定：

$$\left.\begin{array}{l} a-b>0 \\ a-b=0 \\ a-b<0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a>b \\ a=b \\ a<b \end{array}\right.$$

在七(上)第一章，学过有理数减法后在习题 1.4 中第 10 题，就已经为这里做准备了. 在八(上)第十二章一次函数中，比较 $y_1=80x$ 与 $y_2=60x+1\ 000$ 值的大小时，也需用到.

(3) 因为小学已学过比较两个小数(分数)的大小，不等的概念与符号已知道，所以本章一开始第一个问题是带有复习性质的，让学生知道在原有知识基础上进一步学习.

(三) 一元二次方程(第十七章)

(1) 在推导出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ (\Delta=b^2-4ac)$ 时，课本上接着说明：当 $\Delta>0$ 时，有两个不相等实数根；当 $\Delta=0$ 时，有两个相等的实根；当 $\Delta<0$ 时，没有实数根.

这里，要特别提醒注意：“$\Delta<0$ 时，没有实数根，”的意义“是 $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ 不是实数”(高中再出现“虚数”概念). 而不是说 $\Delta<0$ 时，不能用这个公式求根了(这时仍然用此公式求根).

不说清楚这一点，连韦达定理在 $\Delta<0$ 时也不能成立了. 因为课本上说明韦达定理时，是利用求根公式来推导的.

（2）分式方程. 课本没有单独列成一章. 一般解法都是用几个分式的公分母去乘各项，化为整式方程去解. 由于化成整式后，可能是一次、二次等，因此，课本分别在七（下）第九章分式中，列一节解可化为一元一次方程的分式方程，而在这一章，安排一个例题（书上例5）来解可化为一元二次方程的分式方程.

这里要提醒注意：有些分式方程（组）在求解时，如直接通过去分母，往往会得到一个高于二次的整式方程，不易求解. 这时，可考虑如下例那样用换元方法求解：

例 解方程 $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$.

解时可先设 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$，于是先解 $\dfrac{1}{y}+y=\dfrac{5}{2}$. 求出 $y_1=2$，$y_2=\dfrac{1}{2}$，然后再解 $\dfrac{x^2+1}{x}=2$，$\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$.

这个处理问题的方法，在这章没有举例，但在第九章C组复习题中给出一题.

解下列方程组：① $\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=10,\\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{7}{y}=-5;\end{cases}$ ② $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{6}{x-y}=3,\\ \dfrac{9}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=1.\end{cases}$ 希望给学生一些启示.

（3）前面学过，一元二次方程可以通过因式分解法求解. 反过来，一个二次三项式的因式分解，也可通过一个二次方程的求根给予解决（没讲求根公式前，只有用配方法，但这就麻烦了）.

如果方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两根为 x_1，x_2，由韦达定理可知：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

这样，可得
$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]\\&=a(x-x_1)(x-x_2).\end{aligned}$$

这就是说，要把二次三项式 ax^2+bx+c 分解因式时，可先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1，x_2，然后直接得出：$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

例1 把下列各式分解因式：

① x^2-2x-1； ② $4x^2+8x-1$.

解 ① ∵ 方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根为 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$，

∴ $x^2-2x-1=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$.

② ∵ 方程 $4x^2+8x-1=0$ 的两根为

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{-2-\sqrt{5}}{2},$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 4x^2+8x-1&=4\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)\\&=(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5}).\end{aligned}$$

例 2　把 $9x^2-30xy+24y^2$ 分解因式.

解　把 x 看作未知数，y 看作已知数，则关于 x 的方程 $9x^2-30xy+24y^2=0$ 的两根是

$$x_1=2y,\ x_2=\frac{4}{3}y$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 9x^2-30xy+24y^2&=9(x-2y)\left(x-\frac{4}{3}y\right)\\&=(3x-6y)(3x-4y).\end{aligned}$$

练　习

把下列各式分解因式：

(1) x^2-3x-2，　　(2) $4x^2-2x-1$，

(3) $6x^2-16xy+8y^2$，　　(4) $x^2-4xy+y^2$.

三、函　数

$$
\text{有理函数}\begin{cases}\text{整式函数}\begin{cases}\text{一次函数}\\\text{二次函数}\end{cases}\\\text{分式函数—反比函数}\end{cases}
$$

（一）平面直角坐标系（第十一章）

（1）在这里讲平面直角坐标系，是为下章讲函数做准备. 介绍函数概念时，通过实际问题中有列表、解析式、图象表述的两变量间关系抽象出概念的. 函数需要画图，故需先介绍平面直角坐标系.

另外，在上一章相交线平行线中还学习了平移. 平面图形放在坐标系里作平移也更为方便（后面要讲的其他几何变换也同样），因此接着在这里介绍直角坐标系是很必要的.

（2）“阅读与思考”中介绍确定台风中心位置，涉及极坐标和球面坐标，扩大学生视野.

（3）在坐标系内作平移，就是把图形上点的横、纵坐标加、减一个数即可.

（二）一次函数（第十二章）

（1）本章第一小节讲画函数图象时，课本重点放在画正比例函数图（例习题中有 $y=\pm 2x$，$y=-x$，$y=\pm 4x$），务必让学生实际操作，从而有较深印象.

为什么如此安排呢？研究一次函数的图象和性质，是以它的特例为基础进行的. 先让学生总结前面画过的 $y=\pm 2x$，$y=\pm 4x$ 等图象，直观地归纳出 $y=kx$ 的图象是通过原点的一条直线. 然后，通过在同一坐标系中画出 $y=2x$，$y=2x+3$ 得到 $y=kx+b$ 是一条平行于 $y=kx$ 的直线的（$y=kx$ 的图象是一条过原点的直线，在学过相似形、直角三角形解法后，可以从道理上作出说明——见九年级相关的复习题）.

（2）$y=kx+b$ 与 $y=kx$ 的关系，在学过平移之后，还可如下进行.

对于 $y=2x$ 来说，将它向上平移 3 个单位，即作 $(x, y)\rightarrow(x, y+3)$ 后得新函数 $y+$

$3=y'$，$x=x'$，从而得 $y=y'-3$，$x=x'$，代入 $y=2x$ 中得 $y'-3=2x'$ 即 $y'=2x'+3$.

（3）“方程与曲线”这是解析几何研究的内容. 函数有图象，方程也应有它的图象（叫曲线）. 课标在一次函数标题下，有一条要求：“体会一次函数与二元一次方程的关系”. 课本根据这个精神，在能把二元一次方程转化为一次函数这个前提下，建立二元一次方程与直线的对应. 提前渗透解析几何思想.

（4）二元一次方程的解集有无数组. 课本在这节的练习中第 2，3 两题，就是让学生通过练习，进一步记住这一点.

一般地，未知数的个数多于方程的个数时，它们的解往往不确定，这类方程或方程组称为不定方程或不定方程组，对于不定方程（组），通常感兴趣的是研究他们的整数解.

（5）二元一次方程的整数解. 有 5 角、1 元的硬币各若干个，从中取出一些凑成 4 元，问有多少种不同取法？

设每次取出 5 角的 x 个、1 元的 y 个，问题就成为求 $0.5x+y=4$ 的整数解.

在限制条件下，这个方程 $y=4-0.5x$ 的解只有有限个，可用列表逐个检验去求：

x	0	2	4	6	8
y	4	3	2	1	0

. 那么对于任意的二元一次不定方程，能不能找到一个有效而又简便的方法，去求出它的所有解呢？

例 1　求方程 $13x+30y=4$ 的整数解.

解　由原方程可得

$$y=\frac{4-13x}{30}$$

因为要求 x，y 都是整数，所以$\frac{4-13x}{30}$必定是整数. 因此 $4-13x$ 应是 30 的倍数.

由观察可知，当 $x=-2$ 时，$4-13x=4-13\times(-2)=30$ 是 30 的一倍，即得 $y=1$. 就是说，通过观察，我们求得了方程的一组解$\begin{cases}x=-2,\\ y=1.\end{cases}$

本例是不是只有这一组解呢？如果不是，又如何求出其余解？

通过观察，已经找到了一组解. 下面，利用这组解来探求方程的其他解.

设（x，y）是方程的任一组整数解，于是有

$$13x+30y=4. \tag{①}$$

又因为（-2，1）是方程的一组整数解，于是也有

$$13\times(-2)+2\times1=4. \tag{②}$$

比较①②得

$$13x+30y=13\times(-2)+30\times1.$$

分别移项后合并，得

$$13(x+2)=30(1-y). \tag{③}$$

因为 x，y 都是整数，所以等式③两边都是整数. 又等式左边能被 13 整除，因此等式右边也应能被 13 整除. 但 30 不能被 13 整除，所以，只有 $1-y$ 能被 13 整除，即

$$1-y=13t,\ t\ \text{是整数}.$$

将 $1-y=13t$ 代入方程(3)，得

$$x+2=30t,\ t\ \text{是整数}.$$

于是，我们有 $\begin{cases}x=-2+30t,\\ y=1-13t\end{cases}$ （t 是整数）.

不妨给 t 一些值，求对应的 x，y 值，然后代入原方程中检验看，是不是方程的解. 由此可见，这就是原方程的全部整数解.

对于原方程来说，某组具体解如 $\begin{cases}x=-2,\\ y=1\end{cases}$ 叫做它的特解，而 $\begin{cases}x=-2+30t,\\ y=1-13t\end{cases}$（$t$ 是整数），则叫做它的通解.

至此，我们算圆满地解答了例 1.

对于每一个二元一次不定方程都按上述过程求解，就显麻烦，能不能就一般式来研究出一个求解公式呢?

受上面例子的启发，研究下面一个一般性问题：

如果 a，b 是互素（即 a 与 b 除 1 外，没有公约数）的正整数，c 是整数，且方程

$$ax+by=c \tag{①}$$

有一组整数解 x_0，y_0（特解），那么这个方程的一切整数解（通解）是：

$$\begin{cases}x=x_0+bt,\\ y=y_0-at\end{cases}\ (t\ \text{是整数}).$$

证明 设 x，y 是方程①的任一组整数解，于是有

$$ax+by=c. \tag{②}$$

因为 x_0，y_0 是方程①的整数解，当然满足方程：

$$ax_0+by_0=c. \tag{③}$$

由②③，得

$$ax+by=ax_0+by_0,$$

即

$$a(x-x_0)=b(y_0-y). \tag{④}$$

④式中各个字母都代表整数，且 a，b 互质，所以 $x-x_0$ 必是 b 的倍数，即 $x-x_0=bt$（t 是整数）. 将此式代入④，得 $y_0-y=at$，于是得

$$\begin{cases} x=x_0+bt, \\ y=y_0-at \end{cases} \quad (t\ \text{是整数}). \tag{⑤}$$

将⑤代入①，有

$$ax+by=a(x_0+bt)+b(y_0-at)=ax_0+by_0=c.$$

所以⑤式即为方程①的一切整数解.

这里的方程①的通解，能不能改写成如下形式：（你证一证看）

$$\begin{cases} x=x_0-bt, \\ y=y_0+at \end{cases} \quad (t\ \text{是整数}).$$

有了公式⑤，求二元一次不定方程的通解，关键是先要找出它的一组特解.

如何找出二元一次不定方程的一组特解？下面通过例题来具体说明.

例 2　求 $5x+3y=22$ 的整数解.

解法一　这个题中系数小，直接观察就可得出当 $x_0=2$，$y_0=4$ 是方程的一组解，所以方程的通解为

$$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=4-5t \end{cases} \quad (t\ \text{是整数}).$$

解法二　先把方程变形，并尽可能地把整数分离出来，然后再观察就更容易，如

$$y=\frac{22-5x}{3}=7-x+\frac{1-2x}{3}.$$

容易看出 $1-2x$ 应是 3 的倍数. 很明显，$x=-1$ 时，有 $y=9$ 是方程一组解，所以通解为

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=9-5t \end{cases} \quad (t\ \text{是整数}).$$

解法三　先考察方程

$$5x+3y=1,$$

因为这个方程系数小，容易观察得到

$$5\times2+3\times(-3)=1.$$

将上式的两边乘以 22，得

$$5\times(2\times22)+3\times[(-3)\times22]=22.$$

故取　$x_0 = 2 \times 22 = 44$，　$y_0 = (-3) \times 22 = -66$.

所以通解为 $\begin{cases} x = 44 + 3t, \\ y = -66 - 5t. \end{cases}$（$t$ 是整数）

可见，二元一次不定方程在无约束条件下，通常有无数组整数解. 由于求出的特解不同，它的通解形式可能不同. 但它们都包含了所有整数解.

对于例 2 中三个不同的通解形式，分别令 t 取不同整数，检验一下，它们是否能得到相同的特解？

例 3　求方程 $6x + 22y = 90$ 的非负整数解.

解　原方程应先化简为

$$3x + 11y = 45. \qquad ①$$

由观察，易知 $x_0 = 4$，$y_0 = -1$ 是方程

$$3x + 11y = 1$$

的一组整数解，故方程①的一组整数特解为

$$\begin{cases} x_0 = 4 \times 45 = 180, \\ y_0 = (-1) \times 45 = -45. \end{cases}$$

所以方程①的通解为

$$\begin{cases} x = 180 + 11t, \\ y = -45 - 3t \end{cases} \quad (t \text{ 是整数}).$$

但本题要求的是非负整数解，所以应有

$$\begin{cases} 180 + 11t \geqslant 0, \\ -45 - 3t \geqslant 0. \end{cases}$$

解得 $-\dfrac{180}{11} \leqslant t \leqslant -15$. 由于 t 是整数，故 t 只可能取 -16，-15.

当 $t = -16$ 时，得　$x = 4$，$y = 3$；

当 $t = -15$ 时，得　$x = 15$，$y = 0$.

故原方程的非负整数解是

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15, \\ y = 0. \end{cases}$$

例 4　有两个水桶，小水桶能盛水 4 kg，大水桶能盛水 11 kg，不用秤称，应该怎样用这两个水桶盛出 5 kg 水来（图 1－7）？

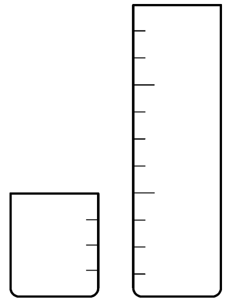

图 1－7

你回忆一下，如何解决？

这样的题，你不妨画一个图做个理想实验（代替真的用桶装）：

(1) 小桶装满水后倒入大桶，连续 3 次，这时大桶已满，小桶中还剩 1 kg.

(2) 将大桶中水倒掉，再把小桶中第 3 次剩下的 1 kg 水倒入大桶.

(3) 将小桶第 4 次装满，再倒入大桶，这时大桶中有水 5 kg.

实验是科学研究中的一个重要方法，特别有助于人们去观察现象、发现和验证规律. 这里通过实验，找到了解决问题的办法. 是否就只有如上一种方法？怎样推广到去解决类似问题？

现在，我们来分析上面操作过程中的数量关系，把倒水过程中的数量列式，有

$$(4\times 3-11)+4=4\times 4-11=5.$$

可见，整个过程是研究 4 与 11 经过多少次加、减运算，能得到数 5. 本例中 4 加了 4 次，减去一个 11(或者说加上一个 -11). 问题的实质也就是求 4 与 11 出现的次数了.

设 4 出现 x 次，11 出现 y 次，用 4 和 11 把 5 表示出来，即得

$$4x+11y=5. \tag{1}$$

这样，就把分水问题归结为求不定方程(1)的整数解了.

这个方程应该会解了吧！

它的通解应是

$$\begin{cases}x=4+11t,\\ y=-1-4t\end{cases}\quad (t\text{ 是整数}). \tag{2}$$

可见上面的分水问题，远非一组解，(2)就是它的所有整数解.

比如，当 $t=-1$，由(2)得 $x=-7$，$y=3$. 这也就是一种分水方法：① 大桶第一次装满，两次装满小桶并倒出，第 3 次有 3 kg 倒在小桶中；② 大桶第二次装满，先倒 1 kg 入小桶，小桶倒出，大桶中 10 kg，再两次倒满小桶后倒出，再把大桶中的 2 kg 倒入小桶；③ 大桶第三次装满，先倒 2 kg 入小桶并由小桶倒出，从大桶中再装满小桶一次，这时大桶中就剩下 $11-2-4=5$ 了.

又如，当 $t=0$ 时，$x=4$，$y=-1$ 这正好就是前面实验的情形.

不用秤称，而用两个不同的桶来分水的问题如例 4，还是可以找到别的解决方法.

设 4 kg、11 kg 的两种容量的桶中装有 i kg、j kg 水，因而可用整数点表示倒水过程中的状态，$0\leqslant i\leqslant 4$，$0\leqslant j\leqslant 11$ 是倒水时必须将一个桶倒满，或者将一个桶倒空，把整数点画成坐标图如图 1－8 所示.

在允许的顶点集中，如果状态(i_1, j_1)可经过一次倒水达到状态(i_2, j_2)，就在对应顶点之间用一条带方向(箭头表示)的线把它们连结起来. 向上的线表示向 4 kg 桶里倒入、向下线表示从 4 kg 桶中倒出，向右线表示向 11 kg 桶中倒入，向左线表示从 11 kg 桶中倒出. 我们的目标，就是在图中寻找从(0, 0)到(5, 0)的有向路径.

在图 1－8 上，可以找到一条有向路径：$(0, 0)\to(0, 4)\to(4, 0)\to(4, 4)\to(8, 0)\to(8, 4)\to(11, 1)\to(0, 1)\to(1, 0)\to(1, 4)\to(5, 0)$.

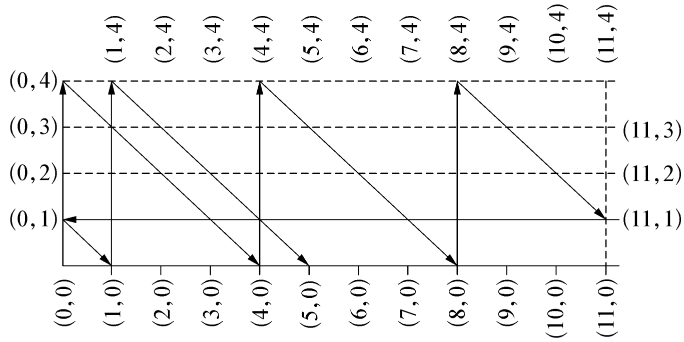

图 1-8

按这个路径具体操作是：→装满 4 kg 桶→将 4 kg 桶中水倒入 11 kg 桶→装满 4 kg 桶→将 4 kg 桶中水倒入 11 kg 桶→装满 4 kg 桶→将 4 kg 桶中水的 3 kg 倒入 11 kg 桶→将 11 kg 桶中全部水倒出→将 4 kg 桶中 1 kg 倒入 11 kg 桶→装满 4 kg 桶→将 4 kg 桶中水倒入 11 kg 桶.

由上可以看出，用这样的有向图来解决这个问题，不仅可以得知要通过 10 次能得出结果，而且还给出了具体的操作办法.

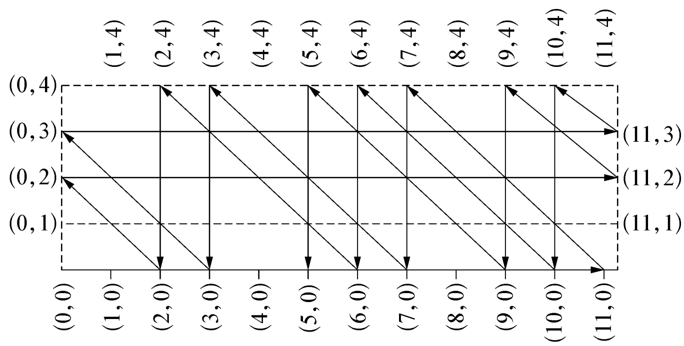

图 1-9

另一条路经如图 1-9：(0，0)→(11，0)→(7，4)→(7，0)→(3，4)→(3，0)→(0，3)→(11，3)→(10，4)→(10，0)→(6，4)→(6，0)→(2，4)→(2，0)→(0，2)→(11，2)→(9，4)→(9，0)→(5，4)→(5，0). 按这条路径操作共须 19 次. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴方程 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 不就是一条直线吗?

(6) 在二元一次方程 $ax+by=c$ 中，只要 $a^2+b^2\neq 0$（即 a，b 不同时为 0），那么，它们在平面坐标系里的图形，仍然是一条直线，如 $x=5$，或 $y=-2$.

有了这样的说明，二元一次方程组可以定义为两个二元一次方程组成的方程组了.

(7)“能根据一次函数的图象求二元一次方程组的近似解”. 这是原课标(实验稿)上提的要求. 2011 版课标已没有这个提法了. 它只提出“体会一次函数与二元一次方程的关系”. 因此，课本在讲一次函数与二元一次方程组的关系时，主要是以图形为背景，让学生直观体

会二元一次方程组解的三种可能，而不在于求出解.

（8）课标指出“推理能力的发展应贯穿于整个数学学习过程中. 推理一般包括合情推理和演绎推理”. 归纳和类比属于合情推理外，统计推断也属于合情推理. 因此，本章的“综合与实践”就安排“一次函数模型的应用”，而在九（上）第二十一章二次函数的应用中，安排了一个二次函数模型，研究汽车制动距离与速度间关系问题. 两者都是通过建模，去探究事件发展可能的结果.

（9）一次函数之前，已经学过了一元一次方程和一元一次不等式的解法. 因此，在这章，用一次函数把前两者统一起来，即一元一次方程和不等式的解，乃是一次函数的零点与非零点，以加强学生对数学知识的整体认识.

（三）二次函数与反比例函数（第二十一章）

（1）二次函数，首先重点研究 $y=ax^2$ 的图象与性质，然后通过平移同时研究 $\begin{cases} y=ax^2+k, \\ y=a(x+h)^2, \end{cases}$ 最后通过配方研究 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

（2）和一次函数一样，用二次函数统一一元二次方程和一元二次不等式解的研究.

（3）二次函数的应用，重点是利用它求极值.

（4）为什么把反比例函数放在二次函数一起呢？

先来看解析几何的旋转公式：

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases}$$

这个公式中 (x, y) 是旧坐标，(x', y') 是该点在转轴后新坐标系中的新坐标. θ 是坐标轴旋转的角度.

例 1　将坐标轴旋转 $\dfrac{\pi}{4}$，求曲线 $xy=k\ (k\neq 0)$，在新坐标系中的方程，并画图.

解　把 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 代入上面旋转公式，得

$$\begin{cases} x=x'\cos\dfrac{\pi}{4}-y'\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), \\ y=x'\sin\dfrac{\pi}{4}+y'\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'). \end{cases}$$

代入方程 $xy=k$，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=k，即\ x'^2-y'^2=k.$$

这个方程的图形是等轴双曲线，当 $k>0$ 时双曲线焦点在 x' 轴上，当 $k<0$ 时双曲线焦点在 y' 轴上，如图 1－10 所示.

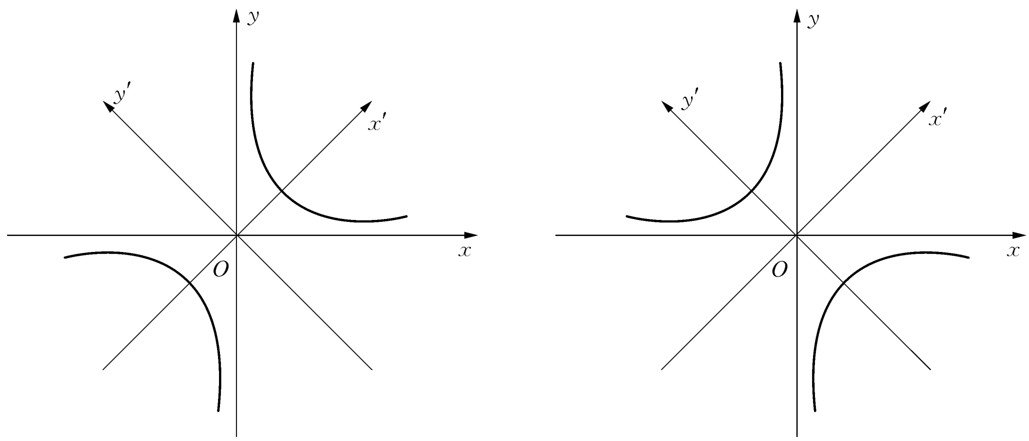

图 1－10

例 2 将坐标轴旋转$\frac{\pi}{2}$，求 $y=ax^2$ 在新坐标系中的方程.

解 把 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 代入上面旋转公式，得

$$\begin{cases} x=x'\cos\frac{\pi}{2}-y'\sin\frac{\pi}{2}=-y', \\ y=x'\sin\frac{\pi}{2}+y'\cos\frac{\pi}{2}=x'. \end{cases}$$

代入 $y=ax^2$，得

$$x'=a(-y')^2, \text{即 } y'^2=\frac{1}{a}x'.$$

这个方程在新坐标系中的图形，是解析几何中研究的抛物线，当 $a>0$ 时，焦点在 x' 轴正半轴上，当 $a<0$ 时焦点在 x' 轴负半轴上.

由上可见，二次函数图象与反比例函数图象统一是解析几何中的“二次曲线”. 把它们放在一章是否有道理?

另外，反比例函数与一次、二次函数图象不一样，对于整个实数区间来说，它的图象，不连续，而以两个坐标轴为它的渐近线，以 y 轴为界图象被分为两支. 这也较难理解.

第二部分

图形与几何

一、图形的性质

（一）直线与角（第四章）

（1）有的书上先从背景材料引出直线概念，然后定义线段、射线. 本教科书先从背景材料引出线段概念，然后介绍射线、直线.

（2）苏联科学院院士 A. H. 柯尔莫戈洛夫主编的《几何》课本，定义："任一点集叫做几何图形."

几何图形是由点、线、面、体组成的. 其中点是最基本的图形.

（3）2011 版课标增加了"理解线段的和、差". 课本中增加了这个内容. 后面在给出公式 $(a\pm b)^2$ 的几何背景时，用相似形知识证明成比例线段时都要会用到.

（4）课标提出"会比较线段的长短""能比较角的大小". 课本在这两处，除了介绍可通过度量进行比较外，着重介绍了叠合的方法. 为什么呢？因为后面判定两个三角形全等的两个命题 SAS、ASA，是可以通过叠合证明的，而要叠合两个三角形，必须知道如何叠合线段和角的.

（5）"尺规作图"中，作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角，是作为基本作图被提出的. 在这里介绍，可以要求学生作出两线段和差；两角的和差（课本安排在相应的练习中）这不仅有利于学生"理解线段的和差"，更重要的是，在探索两个三角形是否全等时，如不通过作图作出两个可供叠合的三角形，那么怎么出现两个符合 SAS，ASA 条件的图形呢？

有人提出，在这里作一个角等于已知角，不好证明作法正确（课本在判定两个三角形全等一节，作为练习中一题，要学生自己证明当初作图的正确性的）. 其实好多内容不是一开始就要立即说清道理的，如 $y=kx$ 的图象是过原点的一条直线，在七年级数学内容中能说清吗？我们在九（上）讲相似形、解直角三角形时放在复习题中，让学生领会如何去说道理的.

附录：欧几里得几何

在初中学习的平面几何，通常称作欧氏几何.

生活在大约公元前 330 年～前 275 年之间的伟大希腊数学家欧几里得，长期从事教学、

研究和著述，涉猎数学、天文、光学和音乐等诸多领域，所著《原本》共 13 卷. 这部科学巨著自问世以来到 19 世纪末，已被翻译成各种语言的版本超过 1 000 种以上. 明朝万历年间(1607年)，徐光启和传教士利玛窦(意大利)把前 6 卷译成中文出版，定名为《几何原本》.

《几何原本》从少量“自明的”定义、公理出发，利用逻辑推理的方法，推演出整个几何体系，选取少量的原始概念和不需证明的命题，作为定义、公设和公理，使它们成为整个体系的出发点和逻辑依据，然后运用逻辑推理证明其他命题. 它成为人类文明的一块极致瑰宝，创造了人类认识宇宙空间，认识宇宙数量关系的源头，是一部人类历史上的科学杰作. 铸造了一部完整的逻辑演绎体系.

两千余年来，所有初等几何教科书以及 19 世纪以前一切有关初等几何的论著，都以《几何原本》作为依据.

《几何原本》第一卷，一开头就给出了 23 个定义. 接着，给出 5 条公设和 5 条公理：

公设：

① 从任一点到任一点可作直线.

② 直线可向两端无限延长.

③ 以定点为圆心及定长线段为半径可以作圆.

④ 凡直角都相等.

⑤ 同平面的一条直线和另外两条直线相交，若在直线同侧的两个内角之和小于 180°，则这两条直线在直线的这一侧一定相交.

公理：

① 等于同量的量彼此相等.

② 等量加等量，其和仍相等.

③ 等量减等量，其差仍相等.

④ 彼此能够重合的物体是全等的.

⑤ 整体大于部分.

欧几里得采纳了亚里士多德(Aristotle)对公设和公理的区别：即公理是适用于一切科学的真理，而公设则只应用于几何(现在都称作公理).

上面的第 5 公设，由于它的叙述不像其他公设那样简洁、明了. 有人怀疑它不像是一个公设，而更像是一个定理. 从公元前 300 年古希腊时代开始到 1 800 年间，数学家们一直没有放弃消除对欧氏几何第五公设怀疑的努力. 他们沿着两种研究途径，一种是用更加自然、易于接受的命题来代替平行公理；另一种是试图以欧几里得的其他 9 个公理推导出平行公理来. 在众多研究的替代第五公设中，今天最常用的是：“过已知直线外一点，有且只有一条直线平行于已知直线.”[这是苏格兰数学家普莱菲尔(J. Playfair 1748—1819)给出的]在研究平行公理的第二种途径中，许多数学家经多年研究，推进了工作，逐步认识到这条公理是不能从其他公理推出的. 但最先认识到非欧几何是一种逻辑上相容并且可以描述物质空间、像欧氏几何一样正确的新几何学的是高斯. 他从 1799 年开始意识到平行公理不能从其他欧几里得公理推出来，并从 1813 年起发展了这种平行公设在其中不成立的新几何. 作为非欧几

何的发明者，除高斯外，还有同时代的两位：匈牙利数学家波约(J. Bolyai 1802—1806)、俄国数学家罗巴切夫斯基(N. I. Lobatchevsky 1793—1856). 三人中，只有罗巴切夫斯基最早、最系统地发表了自己的研究成果，并且最坚定地宣传和捍卫自己的新思想. 罗巴切夫斯基非欧几何的基本思想与高斯、波约是一致的，即用与欧几里得第五公设相反的断言：“通过直线外一点，可以引不止一条而至少是两条直线平行于已知直线”，作为替代公设，由此出发进行逻辑推导而得出一连串新几何学的定理. 罗巴切夫斯基明确指出，这些定理并不矛盾，因而它的总体就形成了一个逻辑上可能的、无矛盾的理论，这个理论就是一种新几何学——罗巴切夫斯基几何. 其后，德国数学家黎曼(B. Riemann 1826—1866)在1854年发展了罗巴切夫斯基等人的思想而建立了一种更广泛的几何，即现在所称的黎曼几何. 罗巴切夫斯基几何及欧几里得几何只不过是这种几何的特例.

以上介绍的内容，作为数学教师是应该清楚的. 这样，才能更好地理解《2011版课程标准》和沪科版《数学》.

(1)《2011版课标》不出现公理(包括公设)，只出现九条“基本事实”. 这九条基本事实中有两条是公理. 其余七条都是定理，他们是可以证明的，课标可能考虑为减轻负担，不要求给出证明，只作为基本事实提出让学生了解即可.

在沪科版《数学》教科书中，把欧氏公理第4条作为“全等”的定义放在全等三角形一章中. 在代数的一元一次方程一章中，给出了等式的四条基本性质，这实际就是欧氏的几条公理. 类似地，在代数的不等式一章中，也给出了不等式的四条基本性质. 这些应该作为推理、运算的理论根据(包括数字运算中加法和乘法的运算律、幂的运算基本性质).

理性思维的培养，不仅要结合几何内容进行. 同样，教授代数内容时每一步的运算也应当有根有据.

(2) 北京大学李忠教授认为“中学数学教育的目的有以下三个方面：传授初等数学知识；进行逻辑推理训练；培育科学精神”.“数学的训练对青少年的心智、潜能的开发与提升，对于他们的科学精神、探索精神与创新精神的培育，是深刻的、长远的，也是其他学科所不能替代的……说到这里，不能不专门讲一讲欧几里得几何这个课，因为它是最能代表数学演绎精神和数学教育意义的.”“《几何原本》作为教材，在欧洲使用一千年以上……现在我们知道的著名科学家，如牛顿、爱因斯坦，无一不深受其影响，无一不是受到它的激发而走上科学之路. 爱因斯坦说过：‘在逻辑推理上的这种令人惊叹的胜利，使得人类为他们的未来成就获得了必要的信心.’”“一个中学生，在他工作之后可能再没有遇到过一个几何题目或一个二次方程，但是他从数学课中所学到的思考能力以及推理的能力，却伴随他的终生.”

复旦大学李大潜教授说：“我反对讲数学哪些有用、哪些无用. 只是有些数学内容用的范围大，有些用的范围小；有些与外部联系多，有些联系少. 所有这些知识形成一个复杂的网络. 不要以‘将来没有用’来决定教材中内容的删减，要看在数学整体中的作用. 如欧几里得几何，原先的公理体系自然不是非要它不可，但核心问题是逻辑推理方法的训练. 培养逻辑推理能力这一重要的数学素质，最有效的手段是学习平面几何. 学习平面几何自然要学一些定理，但主要是训练逻辑思维，为此必须要学习严格的证明和推理.”

（二）相交线、平行线与平移（第十章）

（1）在平行公理后，出现三线平行定理，在这里如用反证法，学生是否能接受？所以我们把它放在九（下）专讲反证法时，作为习题让学生去解决的. 另外，在八（上）第十三章，讲了证明方法后，也是让学生去自己证明的（这里方法就可有多种）.

（2）平行线性质定理，课标要求证明. 这也是反证法，也放到九（下）作为例题.

（三）三 角 形

1. 三角形中边角关系、命题与证明（第十三章）

（1）本章是逻辑推理的开始，首先要让学生理解为什么要进行论证，其次是这一节要循序渐进，通过证明三角形内角和定理及三个例题（例 3～例 5），让学生逐步熟悉证题的步骤和过程.

（2）命题“若 p 则 q”可简写成 $p \to q$ 形式，这种命题叫假言命题，其中 p，q 分别叫做前提（题设）与结论（题断）. 如果把一个命题的前提与结论互换其位置得到的命题称为原命题的逆命题.

给出一个命题的逆命题是一件比较复杂的事. 如果一个命题是简单命题，只要把该命题中的“前提”与“结论”互换，就可得到该命题的逆命题. 例如：原命题：“如果两直线平行，那么同位角相等”，其逆命题“如果同位角相等，那么两直线平行”. 如果一个命题的题设与结论中包含不止一个条件和结论，那么，在给出逆命题时就存在着部分调换或全部调换题设与题断的问题. 为了区别起见，把部分交换题设与题断所得新命题称为原命题的偏逆命题.

但要强调的是，通常讲逆命题都是指全部调换原命题的题设与题断而得的新命题.

2. 全等三角形（第十四章）

（1）三角形全等条件（由一个元素、两个元素到三个元素的探索）的确定、在三个判定定理之后，再分析还有哪些可能，这是一个全面分析问题的过程，要逐步引导学生思考，不宜省略.

（2）“能够完全重合的两个图形，叫做全等形”（欧氏几何公理）. 课本在作出 SAS、ASA 图形后，让你叠一叠，希望你从而验证结论的正确.

（3）关于全等三角形，2011 版课标上明确提出四条：

① 理解全等三角形的概念，能识别全等三角形中的对应边、对应角.

② 掌握基本事实：两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.

③ 掌握基本事实：两角及其夹边分别相等的两个三角形全等.

④ 掌握基本事实：三边分别相等的两个三角形全等.

在介绍上述三个全等判定定理时，为什么把用尺规作图作出三角形（课标上明确规定要作这样图）放在这里呢？因为，通过作图说明满足这样条件的三角形存在，然后，不同人按同

一条件作出的图形完全可以叠合，即作出的图形唯一.

SAS、*ASA* 作出后，最好让同桌两位同学叠合一下，十分必要(课本上提出这个要求的). 至于 *SSS* 不能叠合(课本没有这个要求)与直角三角形中 *HL* 判定定理一样，要到等腰三角形讲过后，才能证明(*SSS* 定理的证法与 *HL* 证法基本一样).

(4) “全等三角形对应边上的高相等”作为例题的，完全不必讲解，而让学生主动思考解决. 这题用面积公式证明更简单，为什么课本上用两个小直角三角形全等来证明呢? 这都不需教师讲，当学生在做过当天练习中“证明全等三角形对应边上中线(对应角平分线)相等”后，让学生回过头来看例题，让他们思考当一题有多种解法时，哪种解法更具有普遍意义.

3. 轴对称图形与等腰三角形(第十五章)

(1) 轴对称图形与两个图形成轴对称是两个不同概念，既有区别又有联系.

(2) 15.3 节例 1，题目的条件有多余的，A 组复习题 8，条件特殊了，可更一般些.

(3) 本章复习题 C 组中第 2 题，是意大利数学物理学家 ViViaNi(1622—1703)发现的定理. 把它与第 1 题放在一起，旨在让学生体会解题的一种方法——转化.(此题证法不止一种，其中之一是转化为第 1 题)

而第十三章 B 组复习题第 4 题，也正想说明这样的思路. 因为这种处理问题的方法，在几何中是常用的.

4. 勾股定理(第十八章)

(1) 勾股逆定理的证明，在实验本上有过，用的是同一法. 修改送审时，审查委员建议去掉.

(2) 勾股定理的证明，方法甚多，除正文外，史话及复习题中还有，让学生认真读读.

另外，在相似形一章中，在习题中安排了“根据相似形知识证明勾股定理”的题，目的是通过具体例子发展学生逻辑推理能力.

(3) 本章 B 组复习题第 7 题，目的何在? 归纳法推理，容易疏忽它存在的问题，因此要谨慎.

(4) “阅读与思考”内容与 C 组复习题第 4 题，主要为学生进入高中后学习函数时作准备.

(5) 图 2 - 1 为底面半径为 r，高为 h 的圆柱，点 A，B 为圆柱轴截面矩形中相对的两顶点，求蚂蚁从 A 爬到 B 的最短距离.

这个题，过去选用过，现在删去了. 为什么? 因为从 A 到 B 有三条路：一条是 $AC+CB=h+2r$，第二条是展开图后 $\widehat{AB}$ 长 $=\sqrt{(\pi r)^2+h^2}$. 由这两个式算得 $\frac{h}{r}=\frac{\pi^2-4}{4}\approx 1.46$. 故当 $\frac{h}{r}<1.46$ 时路径 2 较短；当 $\frac{h}{r}>1.46$ 时路径 1 较短，当

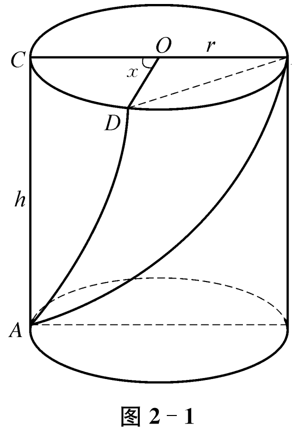

图 2 - 1

$\dfrac{h}{r}=1.4$ 时，两条路一样长. 对于第三条路径则为 $\overset{\frown}{AD}+DB=\sqrt{h^2+(xr)^2}+2r\cos\dfrac{x}{2}$，这里 $\angle COD=x$（弧度）且 $0\leqslant x\leqslant\pi$. 但是要研究函数 $y=\sqrt{h^2+(xr)^2}+2r\cos\dfrac{x}{2}$ 是否有极小值，且这个极小值在何处取得，就不是初中能解决了，这样的题目，认为不适宜放在初中数学中.

这个问题，在《数学通报》、华东师大主办的《数学教学》、中国教育学会主办的《中小学数学（初中版）》中，先后有多篇文章讨论过这个问题

5. 解直角三角形（第二十三章）

（1）为解直角三角形，引进锐角三角函数. 这里不需要对三角函数作什么研究（这是高中数学内容），必须掌握利用计算器求锐角三角函数值，特别是几个特别角（$0°$，$30°$，$45°$，$60°$，$90°$）的准确函数值. 反过来会用计算器根据已知锐角的某个函数值求出这个锐角.

（2）解直角三角形不只为测量（这样内容例、习题中很多）. 在例习题中另外还安排有为今后学习时要用到的内容：如 $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$. 对于直线 $y=kx+b$ 来说，若它向上方向与 x 轴正方向间所夹锐角为 α，并设 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ 为直线上不同两点，则 $\tan\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ 等.

（3）C 组复习题中，安排了如下两题：① 在学习一次函数时，通过描点绘图，直观地得出正比例函数 $y=kx\ (k>0)$ 的图象是一条过原点的直线. 现在，你能对这个结论给出证明吗？

② 如图，$\triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 平移后得到，$\triangle ABC$ 中任一点 $P(x_0,\ y_0)$ 经平移后得 $\triangle A'B'C'$ 中对应点 $P'(x_0+5,\ y_0+5)$. 给出这个平移的方向和距离.

解第一个题时，设 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ 是 $y=kx$ 图象上任意描出的两点，连 OP_1，OP_2，过 P_1，P_2 作 x 轴垂线交 x 轴于点 Q_1，Q_2. 由于 $\dfrac{Q_1P_1}{OQ_1}=\dfrac{y_1}{x_1}=k$，$\dfrac{Q_2P_2}{OQ_2}=\dfrac{y_2}{x_2}=k$，所以 $\text{Rt}\triangle P_1OQ_1\backsim\text{Rt}\triangle P_2OQ_2$，故 $\angle P_1OQ_1=\angle P_2OQ_2$. 又这两个角的顶点都是原点、一边 OQ_1 与 OQ_2 重合，因而 OP_1 与 OP_2 应重合所以 O，P_1，P_2 在同一直线上$\Big($说 $\angle P_1OQ_1$ 与 $\angle P_2OQ_2$ 相等还可用 $\tan\angle P_1OQ_1=\dfrac{y_1}{x_1}=k=\dfrac{y_2}{x_2}=\tan\angle P_2OQ_2$ 来解释$\Big)$.

解第二个问题，就是强调应掌握平移概念的实质. 因为一个平移是由方向和距离确定的，而在坐标系中平移，方向是由 $\tan\alpha=\dfrac{|y_0+a-y_0|}{|x_0+a-x_0|}$ 来定，距离由 $\sqrt{(x_0+a-x_0)^2+(y_0+a-y_0)^2}$ 来定. 让学生体会，前后知识之间的内在联系.

（四）四边形(第十九章)

(1) 把"平行线等分线段"作为定理，是① 为三角形中位线定理的证明作准备(当然，不用此法证明中位线，也还有其他方法的)；② 更为重要的是，为相似形中需要用到的"平行线分线段成比例"的提出，提供一个作为特例的背景材料，在与前者比较中得出后者较自然.

"平行线分线段成比例"定理，在实验课本中通过用面积计算办法给出过证明. 但 2011 版课标上，这个定理作为"基本事实"出现，不要求证明.

(2) 课标要求"了解三角形重心的概念"，"重心"是个物理概念，因此课本先介绍吴文俊教授给出的力学推证，接着利用三角形中位线定理给出几何证明.

(3) 梯形包括等腰梯形的概念与性质，2011 版课标上没有列入，因此，课本作为"阅读与思考"内容提出，对于性质没有证明，可让学有余力的学生研究(包括上面说到的三角形重心的内容).

(4) 三角形三边中垂线交于一点、三个角的平分线交于一点(在前面第 15 章中证明过)，现在又证得三条中线交于一点，那么三角形的三条高(指它所在直线)是否交于一点，如何证明呢？课本 19.2 节的例 3 给你作了准备：过三角形三个顶点，分别作对边的平行线，三条新作的直线构成一个大三角形，而要证的原三角形三条高，正好是这个大三角形三边的中垂线(这个思路正像前面"全等三角形"中说到的转化的办法).

这个问题如不用上面方法，就要用到圆的知识了. 如图 2 - 2 所示，BE, CF 是$\triangle ABC$ 的两条高，设它们交于点 H. 连 AH 并延长交 BC 于点 D. 由于 B, C, E, F 四点共圆 ($\angle BEC=\angle BFC=90^\circ$)，$A$, E, H, F 也四点共圆($\angle AEH=\angle AFH=90^\circ$). 所以 $\angle FAH=\angle FEB=\angle FCB$. 所以 $\angle DHC+\angle HCD=\angle AHF+\angle HAF=90^\circ$，故$\angle HDC=90^\circ$.

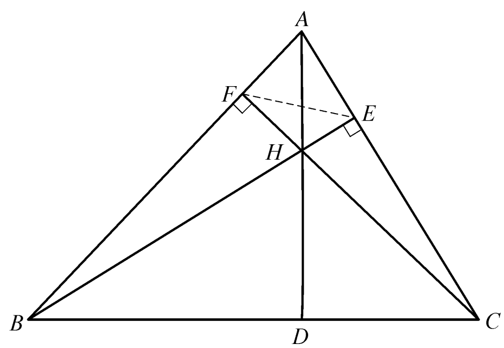

图 2 - 2

三角形三条高交于一点，还可用解析方法证(略).

（五）相似形(第二十二章)

(1) "平行线分线段成比例"定理的引入，是花了一些时间的，因为取消了证明，所以在教学时，要让学生在充分理解背景材料的基础上掌握这个结论.

(2) 位似的定义，本教科书是仿照原苏联 A. H. 柯尔莫戈洛夫主编的《几何》上的方法：首先作一个多边形 $A'B'C'D'$ 相似于多边形 $ABCD$，并且令 $k=2$ (k 是相似系数)，然后，结

合作图，给出位似定义的.

图形的相似系数肯定是正数，但位似系数可以是负数. 课本在“阅读与思考”中提到这一点，并介绍了同向位似与反向位似的说法.

(3) 在这节的“数学园地”里，课本上给出一题：

已知$\triangle ABC$中$A(0, 2)$，$B(-3, 5)$，$C(-6, 3)$，四边形$ABCD$中$A(0, 1)$，$B(4, 1)$，$C(5, 4)$，$D(1, 4)$按如下方式分别对三角形、四边形进行变换：$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$，$k=-1$. ① 画出变换前后的图形；② 变换前后图形有怎样的位置关系？

安排这题的意图，是让学生① 理解$k<0$是怎么回事；② 进一步体会几何变换间的联系. 因为这时的原图与变换后所得图成中心对称.

(4)《数学史话》介绍的“出入相补原理”全文摘选自吴文俊教授的文章，希望指导学生认真读一读. 这不只灌输爱国主义教育，而更重要的是从我国古代数学中得到一种特色的处理问题的思想方法.

(5) 在 22.2 节的练习题中，原来有一题：

如图：在 Rt$\triangle ABC$中$\angle C=90^\circ$，CD是边AB上的高，求证：① $CD^2=AD\cdot DB$；② $BC^2=AB\cdot BD$，$AC^2=AB\cdot AD$；③ 能否根据②证明勾股定理？

这次修改时，保留其中①②两小题. 删去了其中③小题. 而在这个练习最后另列一题：你能根据相似形知识证明勾股定理吗？

为什么要这样改呢？改成这样，给师生留下了广阔的思考空间(避免了不用思考就直接套用公式的坏习惯)，也给老师施展才华提供了一个机会.

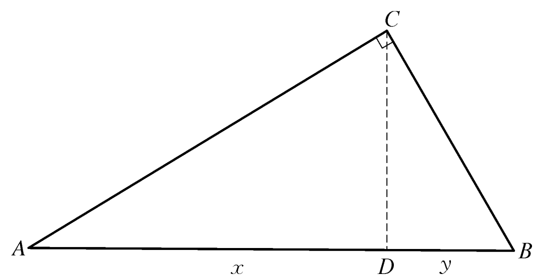

图 2－3

教师在指导学生思考时，应分析在这之前证明勾股定理，都是根据“出入相补原理”通过面积计算而达到的，因为很容易把待证明的式子中a^2，b^2，c^2分别理解为正方形面积(包括对乘积或ab理解为矩形面积). 现在提出用相似形知识，而相似形能提供的是成比例线段$\left(\text{即}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\text{或}ad=bc\right)$，为能得到比例线段，要想办法从中找出相似形. 证勾股定理的条件，只给出$\triangle ABC$中$\angle ACB=90^\circ$，(图 2－3). 求证：$AC^2+BC^2=AB^2$. 怎样想到，要过点C作AB边上高呢？我们分析：在AB上找一点D，把AB分成两段x，y，这样，待证的式子就成为$AC^2+BC^2=AB(x+y)=AB\cdot x+AB\cdot y$，如能证得$AC^2=AB\cdot x$，$BC^2=AB\cdot y$，结论自然成立. 而$AC^2=AB\cdot x$，$BC^2=AB\cdot y$正是成比例线段. 因此关键在于能否找到这一点$D$. 分析$AC^2=AB\cdot x$，把这个式子变形为$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{x}$，由$AB$，$AC$是一个直角三角形中的斜边和直角边，可见$AC$与$x$也应是一个直角三角形中的斜边和直角边，故连$CD$，$CD$必须与$AB$垂直.

由上可见,证题时对结论进行分析,从而能启发我们找到解决问题的方法. 如在 Rt$\triangle ABC$ 中,待证结果写成 $a^2+b^2=c^2$. 这不是比例式子,当然不便利用相似形. 现在我们把待证的式子改变形式:$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ 就成为比例式了. 这里就要看,能否在图中找到 $c+a$, $c-a$ 这样两条线段了. 如图 2-4 延长 AB 到点 D,使 $BD=a$,在 AB 上取 $BE=a$,这时图中 $AD=c+a$, $AE=c-a$(这里用到了作两线段的和、差),下面就要想法证 $\triangle ACE \backsim \triangle ADC$ 了$\Big($这两个三角形中 $\angle A$ 公用,只要再找一个角相等即可. 设 $\angle ABC=\alpha$,则 $\angle D=\dfrac{\alpha}{2}$,又 $\angle ACE=90^\circ-\angle BCE=90^\circ-\left(\dfrac{180^\circ-\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$,于是得证$\Big)$.

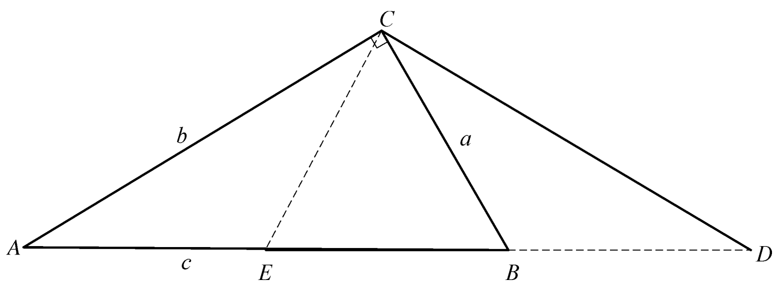

图 2-4

(6) 本章复习题中,安排一题,用相似形知识证明三角形重心性质定理(在四边形中作为例子证过),用以拓宽学生解题思路.

(7) 本章在实验本中还安排一节相似多边形,修改后删去了. 因为 2011 版新课标上没列入这方面要求.

(六) 圆(第二十四章)

(1) 中心对称是点对称、轴对称是直线对称、立体几何中还有面对称. 由于中心对称是旋转 180°的旋转对称,因此为减少篇幅,把它放在这节旋转对称中,作为其特例而提出的.

(2) 反证法在本章中,作为正式内容给予介绍,希望做些题目让学生掌握.

(3) 圆周角定义是:顶点在圆周上,角的两边与圆各另有一个公共点(或者说角的两边是圆的弦). 因为在这之前,没有定义直线与圆相交.

圆周角与同弧上圆心角的关系,这个定理的证明,是完全归纳法的好例子.

(4) "两圆位置关系"课标中没有列入,因此课本把这方面主要内容作为"数学园地"得出,由老师指导学生自己阅读完成.

在 24.7 节"弧长与扇形面积"中,在"思考"栏目下,让学生探究圆柱、圆锥侧面展开,教学时结合展开图,让学生进一步研究它们的侧面积计算公式,体会曲面只有能转化成平面图形,才可计算.

（七）投影与视图（第二十五章）

（1）几何体在一个平面上的正投影叫做这个几何体的视图.（从“某个方向看物体得到的图形叫视图”，这样说法是不准确的）. 所以三视图定义为：自几何体前方向后投射，在正面投影面 V 上得到的视图称为主视图；自几何体的上方向下投射，在水平投影面 H 上得到的视图称为俯视图；自几何体的左侧向右投射，在侧面投影面 W 上得到的视图称为左视图.

（2）一个物体在三个两两互相垂直的平面的投影，是同时得到的. 当把这三个平面图摆在一个平面内时，得到了“长对正、高平齐、宽相等”的规律. 最好制作模型操作给学生看.

（3）在介绍画图时，顺便介绍了直棱柱、正棱柱概念.

并在 C 组复习题中安排一题，借求最短线路问题，学习长方体的展开图.

二、图形的变换与坐标

（一）平移、轴对称、旋转、位似和投影

1. 平移

（一）平移、轴对称、旋转、位似和投影

（1）“认识平移，探索它的基本性质：一个图形和它经过平移所得的图形中，两组对应点的连线平行（或在同一条直线上）且相等”．“课标”的这项要求，安排在七（下）第10章相交线、平行线与平移的第4节．

（2）“在直角坐标系中，探索并了解将一个多边形依次沿两坐标轴方向平移后所得到的图形与原来的图形具有平移关系，体会图形顶点坐标的变化”．根据“课标”的要求，安排在八（上）第11章平面直角坐标系的第2节．

① $(x, y) \to (x+a, y)$ 平移方向：向左、向右，距离：$|a|$．

② $(x, y) \to (x, y+b)$ 平移方向：向上、向下，距离：$|b|$．

③ $(x, y) \to (x+a, y+b)$．

平移方向：$\tan\alpha = \dfrac{|y+b-y|}{|x+a-x|}$，$\alpha$ 为方向线与 x 轴正方向所成的锐角．

平移距离：$\sqrt{(x+a-x)^2+(y+b-y)^2}$［九（上）第23章C组复习题中］．

2. 轴对称

（1）“了解轴对称的概念，探索它的基本性质：成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分”安排在八（上）第15章轴对称图形与等腰三角形中的第1节．

（2）“在直角坐标系中，以坐标轴为对称轴，能写出一个已知顶点坐标的多边形的对称图形的顶点坐标，并知道对应顶点坐标之间的关系”也安排在八（上）第15章．

① 已知点 $P(x, y)$，它关于 x 轴对称点的坐标为 $P'(x, -y)$．

② 已知点 $P(x, y)$，它关于 y 轴对称点的坐标为 $P'(-x, y)$.

3. 旋转

(1) “认识平面图形关于旋转中心的旋转. 探索它的基本性质：一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等”.

“了解中心对称，探索它的基本性质：成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分”以上两条课标要求，安排在九(下)第 24 章圆中的第 1 节.

(2) 在坐标平面内，把一个图形以原点(0, 0)为旋转中心作几个特殊角度的旋转，原图形上任一点 $P(x, y)$的坐标有如下变化：

原图上任一点坐标	以原点为旋转中心，按逆时针方向旋转后对应点坐标			
	旋转 90°	旋转 180°	旋转 270°	旋转 360°
(x, y)	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$	(x, y)

4. 位似

(1) “了解图形的位似，知道利用位似可以将一个图形放大或缩小”安排在九(上)第 22 章相似形中第 4 节图形的位似变换.

(2) “在直角坐标系中，探索并了解将一个多边形的顶点坐标(有一个顶点为原点、有一条边在坐标轴上)分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形是位似的”(九(上)第 22 章).

在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点 O 为位似中心、相似比为 $k\,(k>0)$，原图形上一点的坐标为(x, y)，那么同向位似图形中对应点的坐标为(kx, ky). 当 $k<0$ 时，得到的是反向位似图形(即原图与所得新图在位似中心的两旁).

5. 投影

《课标》对投影部分的要求，主要是为了讲简单物体的视图的(九(下)第 25 章投影与视图). 它讲的实际是把空间图形垂直投影到平面上，而不是平面内的变换.

（二）几种变换间的关系

(1) 连续进行两个平移，可用另一个平移来代替[八(上)第 11 章的“数学园地”].

(2) 在两条平行直线上连续作两个轴对称相当于作一个平移. 其方向垂直于这两条直线，移动距离等于这两直线间距离的两倍.

在两条相交直线上连续作两个轴对称相当于作一个旋转，其旋转中心是两直线的交点，转角等于两直线夹角的两倍[以上在九(下)第 24 章“数学园地”].

(3) 连续作两个中心对称(两个中心对称点是不同的两点),相当于作一个平移[九(下)习题 24.1 第 3 题].

(4) 在位似变换中:$(x, y) \to (kx, ky)$,当 $k=-1$ 时,实际是中心对称[九(上)第 21 章“数学园地”].

(5) 教科书的一些习题中,还安排一些题目,让学生在连续进行两个变换后,会得出什么结果?[如八(上)习题 15.1 第 5 题、第 6 题;九(上)第 22 章 C 组复习题第 1 题;九(下)习题 24.1 第 9 题].

附录:(一) 用二阶矩阵来表示平面变换

平面中几个常见的变换,可以用矩阵表示

1. 恒等变换

对平面上任一点(向量)或图形施以矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$对应的变换,都把自己变成自己. 因此,把这种特殊矩阵称为恒等变换矩阵或单位矩阵,所实施的对应变换称做恒等变换. 如

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}.$$

2. 反射变换

设图形 F 上任取一点 $P(x, y)$,对其施以矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$对应的变换:

$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$,这样将图形 F 变为关于 x 轴、y 轴对称的平面图形,称之为反射变换(即轴对称).

矩阵$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$把一个图形变为与之关于直线 $y=x$ 对称的图形. 如

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}.$$

3. 旋转变换

矩阵$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$通常叫做旋转变换矩阵,对应的变换称旋转变换,点 O 是旋转中心,θ 是旋转角. $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\end{bmatrix}$.

当 $\theta=180^\circ$ 时,这时旋转对称即中心对称. $\begin{bmatrix}\cos180^\circ & -\sin180^\circ\\\sin180^\circ & \cos180^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$,于是

$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$.

4. 位似变换

矩阵 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ 叫做位似变换矩阵，对应的变换称位似变换，点 O 是位似中心. $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$.

(二) 平移、轴对称、旋转的变换式子推导过程

下面，我们研究对称变换.

当连接点 $P(x,\ y)$和点 $P'(x',\ y')$的线段的中点为定点 $A(a,\ b)$时，则说点 P 和点 P' 关于点 A **对称**(或**点对称**)，把点 P 移到点 P' 的变换，叫做关于点 A 的**对称变换**(或**中心对称**).

由于连接两点$(x,\ y)$，$(x',\ y')$的线段的中点为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

而它是关于图形与坐标的基本公式. 因此，设

$$\frac{x+x'}{2}=a,\ \frac{y+y'}{2}=b,$$

则

$$x'=2a-x,\ y'=2b-y.$$

所以，关于定点$(a,\ b)$的对称变换是

$$\boldsymbol{S}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{2b}-\boldsymbol{y}).$$

特别是，设关于原点的对称变换为 S_0，则

$$\boldsymbol{S}_0:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \longrightarrow (-\boldsymbol{x},\ -\boldsymbol{y}).$$

连接点 $P(x,\ y)$和点 $P'(x',\ y')$的线段 PP'垂直于定直线 g，当 PP'的中点在 g 上时，则说点 P 和点 P'关于直线 g **对称**(或**线对称**)，把点 P 移到点 P'的变换，叫做关于直线 g 的**对称变换**(**反射变换**).

如果点 $P(x,\ y)$，$P'(x',\ y')$关于定直线 $x=a$ 对称，则由于 PP' 平行 x 轴，因此，$y=y'$. 又由于 PP' 的中点在直线 $x=a$ 上，因此，

$$\frac{x+x'}{2}=a,\qquad \therefore\ x'=2a-x.$$

所以，关于定直线 $x=a$ 的对称变换 R 是

$$\boldsymbol{R}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

特别是,关于 y 轴的对称变换 R. 用

$$\boldsymbol{R}_0:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\longrightarrow(-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

来表示.

同样,关于定直线 $y=b$ 的对称变换 R' 是

$$\boldsymbol{R}':(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{2b}-\boldsymbol{y}).$$

关于 x 轴的对称变换 R_0',用

$$\boldsymbol{R}_0':(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{x},\ -\boldsymbol{y})$$

来表示.

如图 2-5,如果点 $P(x_1,\ y_1)$, $P'(x_2,\ y_2)$关于定直线 l: $y=x$ 对称,则 PP' 垂直于 l,从而,平行于直线 $y=-x$. 因此,它的斜率等于 -1.

$\therefore\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1.$

因而, $x_1+y_1=x_2+y_2$ ①

又,由于线段 PP' 的中点在直线 $y=x$ 上,因此,

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

从而,

$$x_1-y_1=-x_2+y_2. \quad ②$$

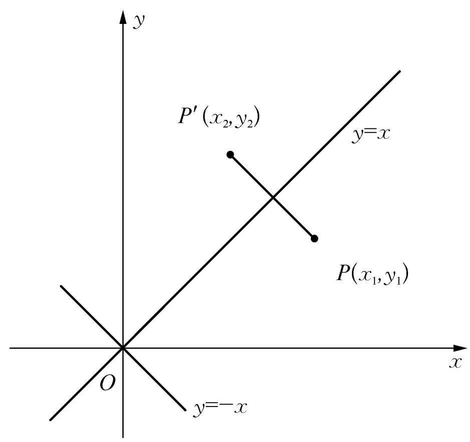

图 2-5

把①②的两边分别相加,相减,则得

$$2x_1=2y_2,\ 2y_1=2x_2.$$

$\therefore\ x_2=y_1,\ y_2=x_1.$

所以,关于直线 $y=x$ 的对称变换 F,可用

$$\boldsymbol{F}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$$

来表示.

总结以上,平移、对称的变换式如下:

(1) 用 $\overrightarrow{OA}=(a,\ b)$ 表示的平移

$$\boldsymbol{T}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}).$$

(2) 关于定点 $A(a,\ b)$的对称变换

$$\boldsymbol{S}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{2b}-\boldsymbol{y}).$$

关于点 $O(0,0)$ 的对称

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow (-\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y}).$$

(3) 关于定直线 $x=a$ 的对称变换

$$\boldsymbol{R}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

关于 y 轴 ($x=0$) 的对称

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow (-\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

(4) 关于定直线 $y=b$ 的对称变换

$$\boldsymbol{R}':(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{2b}-\boldsymbol{y}).$$

关于 x 轴 ($y=0$) 的对称

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y}).$$

(5) 关于定直线 $y=x$ 的对称变换

$$\boldsymbol{F}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}).$$

下面,研究旋转变换

如图 2-6 所示,已知图形上一点 $P(x,y)$ 围绕原点 O 逆时针旋转 θ 角到另一点 $P'(x',y')$.

设 OP 与 x 轴正向夹角为 α, $|OP|=r$,

则 $\begin{cases} x=r\cos\alpha, \\ y=r\sin\alpha. \end{cases}$

又因为 $|OP'|=r$,故有

$$\begin{cases} x'=r\cos(\alpha+\theta)=r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta \\ y'=r\sin(\alpha+\theta)=r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta \end{cases}$$

将 $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$ 代入,有 $\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$

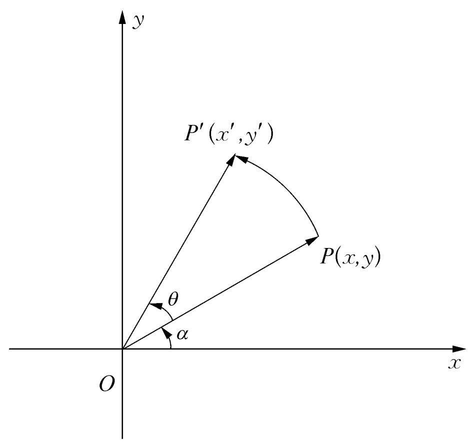

图 2-6

旋转变换式即 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

(1) 当 $\theta=90^\circ$ 时, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 当 $\theta=180^\circ$ 时, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(3) 当 $\theta=270^\circ$ 时，$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

(4) 当 $\theta=360^\circ$ 时，$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

几何变换部分的有关资料摘选自：

(1) 江苏教育出版社　高中课标实验教科书(选修)《矩阵与变换》.

(2) 上海教育出版社　英国中学数学教科书.

(3) 北京大学出版社　美国新数学丛书《几何变换 1》.

(4) 数学通报刊载的　美国芝加哥大学《中学数学设计(UCSMP)》.

(5) 文化教育出版社　日本高中数学研究丛书《映射与函数》.

第三部分

统 计 与 概 率

一、抽样与数据分析

（一）数据的收集与整理（第五章）

（1）本章内容在小学都有所接触，因此，这章教学应是把原有基础内容进行整理与提高.

（2）多举一些学生身边的实例，让学生体会统计学无处不在.

本章“综合与实践”水资源浪费现象的调查，让学生就本人家庭、或所在学校、或住家的社区范围进行.

（3）数据的整理，本章内重点介绍表和图. 还有整理内容将在第二十章中介绍.

（二）数据的初步分析（第二十章）

（1）这章是统计学中的重点：① 总体的分布，② 总体特征数.

（2）频数分布只讲直方图，不讲折线图.

（3）极差、标准差课标上不列，只介绍方差.

（4）课本上计算出一组数据的平均数（简称均值）与方差，是样本的均值与方差，用它们去估计总体的均值与方差.

对样本方差的计算通常是按下面公式进行的

$$S^2=\frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$

用这样算出的方差去对总体方差估计，统计学上，把具有这种性质的估计叫做无偏估计.

二、事件的概率

（一）概率初步（第二十六章）

（1）课标上，列出“事件的概率”的要求有两条：① 能通过列表、画树状图等方法列出简单随机事件所有可能的结果，以及指定事件发生的所有可能结果，了解事件的概率. ② 知道通过大量的重复试验，可以用频率来估计概率.

（2）“几何概率”作为“阅读与思考”内容，供学生阅读，以扩大视野.

附录：统计学简介

统计学是一门科学，它研究怎样以有效的方式收集、整理、分析带随机性的数据，并在此基础上，对所研究的问题作出统计性的推断，直至对可能作出的决策提供依据或建议.

（一）数据的收集

有效地收集资料有两种方法：观察与试验. 在“观察”时，观察者可以说是处在被动地位，他只是对所感兴趣的事物，记录下“自然而然地”发生的结果，而不去企图改变他所观察的事物. 而在“试验”中，试验者则处在主动的地位，可在一定范围内自由地控制某些因素，以考察它们对其他因素的作用.

在不少情况下，收集的资料可以用数量的形式表达；也有些情况，观察或试验所得的只是事物所属的等级、类别等. 在统计工作中，习惯把所收集来的资料称为“数据”，或者用“样本”这个专门术语.

与观察和试验相应，统计学中产生两个分支学科：“抽样调查”与“试验设计”.

抽样调查中有随机抽样（分无放回的与有放回的）、集团抽样和分层按比例抽样.

试验设计有单因素试验与多因素试验两类.

（二）数据的整理

对原始数据一般需要加以整理，以便把我们感兴趣的信息提取出来，并用简明醒目的方式加以表达. 整理的方式有二：一是对原始数据进行一定的运算，以算出某些代表性数字，

足以反映数据某些方面的特征.这种数字在统计学中被称为“统计量”.二是使用图、表.如数据的频率分布表及直方图,以及散点图及回归直线.

一维数据的重要统计量有:样本均值、样本中位数;样本方差、样本标准差.

(三)统计推断

统计学的中心问题,或者说其主要内容,就是统计推断.

统计推断,就是根据从总体中抽出的样本,去推断总体的性质.由于我们关心的总是总体中的个体的某项指标,所谓总体的性质,无非就是这些指标值的集体的性质,而概率分布正是刻画这种集体性质的适当工具.因此,在理论上可以把总体与概率分布等同起来.例如,当指标值的概率分布为正态分布时,我们可称这个总体为正态总体.

如果指标值的概率分布完全已知,则从统计学的观点看,样本已无用武之地——没有什么需要借助于样本去推断的东西.总体的性质包含在其概率分布中,只有当这种分布中包含未知的成分时,才发生推断问题.

例如,有理由假定:在一大群人中,身高服从正态分布 $N(a, \sigma^2)$.均值 a 反映这群人的平均身高,而方差 σ^2 则反映身高的不均匀程度.虽可假定身高服从正态分布,但 a 和 σ^2 这两个参数则不知道,它们是指标(身高)的概率分布中的未知成分,即推断的对象.又如,大批生产的一种电子元件,在一定条件下,有理由假定元件寿命的概率分布为指数分布,其概率密度为 $f_\theta(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & \text{当 } x\geqslant 0,\end{cases}$ 参数 $\theta>0$ 是这个分布的未知成分,它是元件的平均寿命,正是应用上有兴趣的量,成为统计推断的对象.

一般,把统计推断问题,抽象为如下的数学模型:总体的概率分布 $F_\theta(x)$ 包含了其值未知的参数 θ[正态总体中 $\theta=(a, \sigma^2)$],从该总体随机抽样,得样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,要通过后者,去获得对 θ 的某些了解.这后一点的确切含义,依赖于所要回答的问题的性质,主要的形式有两种:

(1) 估计问题,即要通过样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 对 θ 的值作出估计.如从一大批电子元件中抽出 n 件,测得其寿命为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,要利用这些数据,去估计整批元件的平均寿命.由于估计的对象是参数,常称为参数估计.参数估计分为两种基本形式:点估计与区间估计.前者是用一个数值作为未知参数 θ 的估计值,后者则用一个区间,把 θ 估计在这个区间内.犹如估计某人年龄为 25 岁,是点估计;估计其年龄在 20～30 岁之间,是区间估计.

(2) 检验问题,如某工厂生产了一大批电子元件,其寿命可假定服从指数分布,参数 θ 的值(即整批产品的平均寿命)是未知的.现设这批产品的使用者立下了一个界限:只有在平均寿命 θ 不小于某个值 θ_0 (如 $\theta_0=5\ 000$ h) 时,才接受这批产品.为此,从这批电子元件中抽出若干个,测得其寿命为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$;要据此判断“$\theta\geqslant\theta_0$”是否成立.又如,一种产品中所含杂质的量,可假定为服从正态分布 $N(a, \sigma^2)$,a 为杂质平均含量,现使用者要求平均含量 a 不超过某个界限 a_0.于是,抽出 n 个样品,测得其含量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,要由此判断“$a\leqslant a_0$”是否成立.

可见，检验问题中，有一个与总体概率分布的参数有关的待判断的命题：$\theta \geqslant \theta_0$，$a \leqslant a_0$ 等. 统计学上，把这称为“假设”. 使用样本去判断一个假设是否成立，称为“假设检验”. 它是与参数估计并列的、统计推断的两种基本形式.

假设检验问题的具体回答只有两种：接受假设，或否定假设. 问题是建立一个法则，使当一有了样本时，这个法则就能决定是接受还是否定假设. 任何一个这样的法则，都叫做所给假设的一个“检验”.

（以上内容节选自(1) 陈希孺著《统计学概貌》、(2) 苏淳著《统计学漫话》）

第四部分

“综合与实践”和“数学活动”

一、设计思路、内容和结构

“综合与实践”是使学生感悟“数学基本思想”，发展“基本数学活动经验”，培养“发现问题和提出问题”并“分析和解决问题”能力的重要载体之一.本教科书关于“综合与实践”内容的选择上，注意了活动的多样性，主题涉及了数学应用、数学探究、数学实验、数学调查、数学制作与设计和数学主题阅读等，安排上重视体现数学模型方法的价值，注意与所学知识的联系，在关注综合性和实践性的同时，还关注活动的开放性、生成性和普适性.

关注开放性，主要是注意让活动的过程、方法和结果以及活动方式具有一定的开放性.从我们的实验情况看，适度的开放，不仅有利于学生的全程参与，也有利于提高活动的质量.事实上教学活动有了空间就有了多样性，这样的活动就能让学生在交流展示中与他人分享活动的经验、探究的方法和自己的收获与感受.

如：“12.4　综合与实践　一次函数模型的应用”，教科书提供两个可以建立函数模型的现实情境，在学生积累函数模拟活动经验后，接着提出：“请你提出一个可以应用函数模型解决的问题，并建立合适的函数模型”，这就使活动具有了一定的开放性.

又如“20.3　综合与实践　体重指数”，在活动方式上，学生可以独立解决，也可以与同伴合作；如何获取有关数据，查找影响体重的因素，提出保持体重正常的建议等，都给学生留有空间，增强了活动的实践性.

关注生成性，这就要求“综合与实践”在活动解决所给的问题中，能产生新的有价值的问题，可以做进一步的探究或拓展.解决生成性的问题，往往需要更多的知识，从而能更好地反映“综合与实践”的活动综合性.生成性的教学价值还在于能让学生从解决问题的过程中，学会“发现问题”“提出问题”.这正是《课标》关注的目标，也是我们着力想加强的重点.

如：“12.4　综合与实践　一次函数模型的应用”中，测量小球反弹的高度，就涉及如何测量(运用物理知识设计测量工具)，如何处理测量的误差(运用统计中的平均数).

又如：“24.8　综合与实践　进球路线与最佳射门角”，在活动之后，有兴趣的学生还可以运用所得到的基本结果，进一步研究两人配合进攻问题：在不同跑动的路线下，一方如何传球，才能使同伴获得最佳射门角等.

关注普适性，就是注意适合学生的年龄特点和能力水平，兼顾城乡差异、地域差异和学

校差异，使活动切实可行. 为此，我们对几个“综合与实践”在部分学校进行了实验，认真听取了实验教师的意见和建议，并根据实验中效果良好的案例，对“综合与实践”活动实施过程进行了重新设计；教学过程的展开以“问题串”或活动系列依次推进，便于教师教学，更有操作性，也有利于保证活动的质量. 此外，我们还根据学生的意见，注意了内容呈现的有趣性，更符合其年龄特点.

教科书中还安排了一些“数学活动”，与“综合与实践”活动相比较，它的综合性要求不高，活动的复杂程度和活动量小. 开展这样的活动，不需要花费学生很多时间和精力，其目的在于让学生在解决问题中，积累活动经验，学习数学基本思想和基本方法，形成能力. 其中，“挪球问题”和“对角线穿过的小正方形数”这两个活动的主题都是解决非常规问题，体现了推理思想在发现和提出问题、分析和解决问题中的作用，有助于学生领悟数学思想方法，积累数学活动经验.

二、“综合与实践”与“数学活动”的安排

（1）综合与实践	
① 一次方程组与 CT 技术	（七上）
② 水资源浪费现象的调查	（七上）
③ 排队问题	（七下）
④ 纳米材料的奇异特性	（七下）
⑤ 一次函数模型的应用	（八上）
⑥ 多边形的镶嵌	（八下）
⑦ 体重指数	（八下）
⑧ 获取最大利润	（九上）
⑨ 测量与误差	（九上）
⑩ 进球线路与最佳射门角	（九下）
⑪ 概率在遗传学中的应用	（九下）
（2）数学活动	
① 探索数的规律	（七上）
② 联产品的成本计算	（七上）
③ 制作正多面体	（七上）
④ 画图	（七上）
⑤ 英文字母统计	（七上）
⑥ 求最大乘积	（七下）
⑦ 钥匙复制原理	（七下）
⑧ 剪纸	（八上）
⑨ 挪球游戏	（八下）
⑩ 对课外作业时间的统计分析	（八下）
⑪ 矩形对角线穿过的小正方形数	（九上）
⑫ 问题出在哪里	（九上）

⑬ 设计图案（一）　　（九下）
⑭ 设计图案（二）　　（九下）
⑮ 投针实验　　（九下）

三、部分“综合与实践”与“数学活动”的处理意见

下面，对“综合与实践”及“数学活动”中几个较难的内容，提出一点处理意见，供参考.

（一）“挪球问题”

问题：设有 A，B，C 三堆球，它们中分别有球 a 个，b 个和 c 个（不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$），我们可以任意选择甲、乙两堆按照以下规则挪动：若甲堆的球数 p 不少于乙堆的球数 q，则从甲堆拿 q 个球放到乙堆去，这就是挪动一次. 继续这个过程，可以经过有限次挪动把 A，B，C 三堆球合并成至多两堆球.

这是苏淳教授提供，由北京市 1963 年数学竞赛题改编的，它的一般证明如下：

（1）若 $b=ka$，将 k 用二进制表示 $k=a_n \cdot 2^n+a_{n-1} \cdot 2^{n-1}+\cdots+a_1 \cdot 2^1+a_0$，$a_n=1$，做如下操作，若 $a_0=1$，从 B 中拿 a 给 A；若 $a_0=0$，从 C 中拿 a 给 A，对其他 $a_i(i=1, \cdots, n-1)$ 类似操作. 最终 A，B 两堆的球数，$a=b=a \cdot 2^n$，结论成立；

（2）$b=ka+r\ (1 \leqslant r \leqslant a-1)$，将 k 用二进制表示

$$k=a_n \cdot 2^n+a_{n-1} \cdot 2^{n-1}+\cdots+a_1 \cdot 2^1+a_0,\ a_n=1,$$

接着做如下操作，若 $a_0=1$，从 B 中拿 a 给 A，若 $a_0=0$，从 C 中拿 a 给 A，对其他 $a_i(i=1, \cdots, n-1)$ 类似操作. 最终 A，B 两堆的球数分别为 $a \cdot 2^n$ 和 $a \cdot 2^n+r$，再从 B 中拿 $a \cdot 2^n$ 给 A，则 B 堆的球数为 r，可知经过上述操作三堆中的最小值严格下降，由辗转相除原理，可知经过有限次类似操作可以将 r 最终变成 0，所以结论成立.

上面的解答中用到了二进制、分类讨论和化归的方法. 解答很抽象，对数学思维水平要求高，不可能期望初中学生能得出这样的结果，显然也不是教科书的意图.

作为解决非常规问题的教学研究，仅找到解答是不够的，我们还应重点研究是怎样发现问题的模式特征和解法的，且这种数学探究必须是符合学生认知水平的. 还有教科书中的“活动二”有一定的开放性，应该如何确定具体的活动任务与要求？这也是需要思考的. 教科书从特殊的情况入手，给出了 $a=1$ 时的三种具体情形的解，从中归纳发现 $a=1$ 时，操作的

思路是：把 A，B 两堆的球数设法化为 2^n，最后就能使 B 堆的球数变为 0，这比较容易. 但发现把 A，B 两堆球数变为 2^n 的一般操作规律不是很简单. 在成功的操作中，观察到 A 堆球数的变化是 $1\to2\to4\to\cdots\to2^n$. 而根据操作的规则只能从多的堆中往少的堆中挪移，那么从 B，C 中往 A 中挪移的球数只能是 1，2，4，…，于是想到用 1，2，4，…来表示 b，其实就是二进制，这样

对于教科书中情形 1（$a=1$，$b=9$，$c=40$）有：

$$a=1,\qquad b=2^3+1,\qquad c=40.$$

对于情形 2（$a=1$，$b=11$，$c=38$）有：

$$a=1,\qquad b=2^3+2+1,\qquad c=38.$$

观察 b 的表示法与挪球操作的关系可以发现：当 b 的表达式中有 1 时，就从 B 中拿 1 个给 A，否则就从 C 中拿 1 个给 A；接下来看 b 的表达式中有没有 2，如果有就从 B 中拿 2 个给 A，否则就从 C 中拿 2 个给 A；再看 b 的表达式中有没有 2^2，如果有就从 B 中拿 2^2 个给 A，否则就从 C 中拿 2^2 个给 A，可将 A，B 两堆的球数都变为 2^3（一般情况可将 A，B 两堆的球数都变为 2^n），最后实现 B 堆的球数为 0.

往下的简单情况就是 $a=2$，它有两种情况：b 是偶数与 b 是奇数.

当 b 是偶数时，同样用 2，4，6，8…表示 b，与 $a=1$ 时的操作类似，可将 A，B 两堆的球数都变为 2^n，最后实现 B 堆的球数为 0.

当 b 是奇数($2k+1$)时，用上面的方法，先把 B 堆的球数变为 1，从而化归为 $a=1$ 的情形予以解决.

至此，我们就容易猜想出 $a\geqslant3$ 时的操作策略，就是将 B 堆的球数 b 变得比 a 小，即 $0\leqslant b\leqslant a-1$，从而转化为已经解决的问题. 这个猜想的正确性在 $a=3$ 时也好验证. 据此，我们就不难给出问题的证明了.

基于上面的研究，对于学生数学水平一般的班级，可提出如下的教学目标：

(1) 经历解决问题（$a=1$）过程，探究 $a=2$ 时的解决问题思路和操作方法(不要求代数表达)；

(2) 学会用特殊化、化归和分类讨论等方法解决问题，积累数学活动经验；

(3) 体会数学思想方法在解决问题中的价值.

教科书中的活动 2，要求学生借助从活动 1 中抽取的方法，探求 $a=2$ 时问题的解法，由特殊到一般，积累数学活动经验，加深对问题的认识，得出一般的操作方法. 分 b 是偶数和奇数两种情况展开，大致的过程如下：

① 先研究 $a=2$，b 是偶数的情况，可给出如下三种情形：

$$a=2,\qquad b=8,\qquad c=40;$$
$$a=2,\qquad b=10,\qquad c=38;$$
$$a=2,\qquad b=20,\qquad c=26.$$

让学生从具体操作中，发现规律，猜想一般的操作方法，并加以验证.

② 再研究 $a=2$，b 是奇数的情况，可给出如下两种情形：

$$a=2,\qquad b=7,\qquad c=41;$$
$$a=2,\qquad b=11,\qquad c=37.$$

让学生猜想用上面的操作，能否将 B 堆的球数变为 0，并进行验证；

观察验证的结果，尝试发现此时的问题与 $a=1$ 时的联系，并加以解决.

③ 总结提升，归纳得出 $a=2$ 时，解决问题的思路与方法.

④ 小结.

小结本节课的探究过程与方法；

交流探究的收获与感受；

提出延伸性问题和提交活动成果的要求.

合作学习能培养学生的团队精神和合作意识，开展合作学习不仅是学生发展的需要，也是“综合与实践”活动特点决定的. 教学时要注意根据教学目标和活动主题，让学生在自主探索的基础上，小组合作共同解决. 小组的划分可根据学生的兴趣自愿进行，人数在 3～5 人时效果较好. 教师要加强对小组合作学习的指导，充分发挥合作学习的优势，提高活动的有效性.

（二）矩形对角线穿过的小正方形数

本综合与实践活动解决的是有一定挑战性的非常规问题，涉及的知识有自然数的性质，图形的认识与证明，相似形，计数的方法等，设计时将操作、观察、思考融为一体，具有综合性、实践性和一定的开放性，较好地体现了渗透基本数学思想方法、积累数学活动经验和培养“四力”的要求.

本综合与实践活动的挑战性在于学生不易发现该问题的模式特征，将其转化为熟悉的问题予以解决，这需要学生能运用数学方法去进行探究，如分类讨论、转化与化归等，通过合情推理发现规律，再进行证明，对数学思考和解决问题的要求较高.

活动时，可先让学生画一些具体的矩形网格（图 4－1），观察它的一条对角线与纵、横网格的相交情况，如在此基础上，要求学生将它们分类.

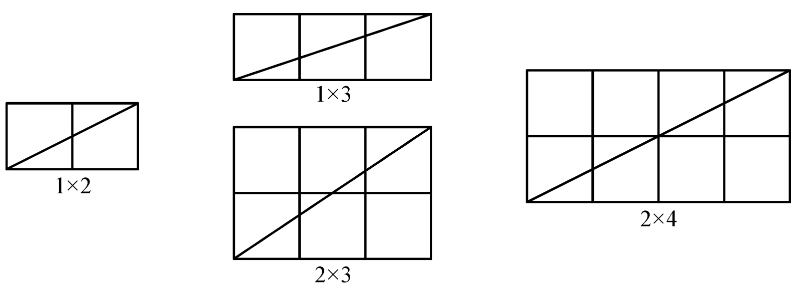

图 4－1

容易发现这些图形可分为两类：一类是对角线不经过矩形网格内部的格点(如 1×2，1×3，2×3 等)，一类是对角线经过矩形网格内部的格点(如 2×4，3×6 等)，这时，m 与 n 不互质.

再引导学生分析这两类图形间的联系，观察 2×4，3×6，2×6 等具体图形，可看出 m 与 n 不互质时，矩形网格是由 m 与 n 互质的矩形网格构成的，因而求 f 的值时可将其转化为几个 $m\times n$(m 与 n 不互质)的情况进行计算，从而解决问题的重点是研究 m 与 n 互质时，f 与 m，n 间的关系.

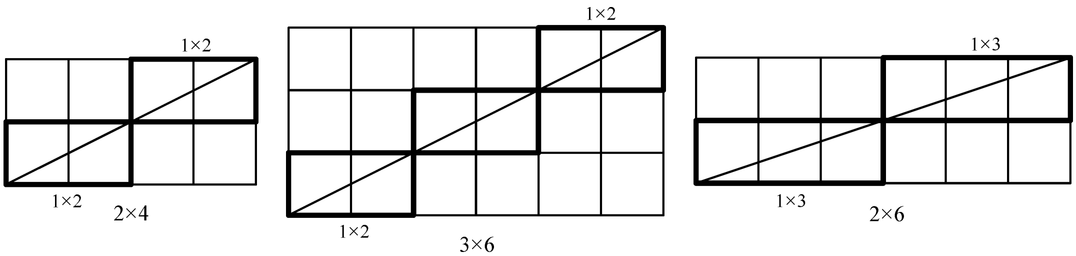

图 4－2

教科书中是让学生观察一些具体图形，填表，归纳出 f 与 m，n 关系式 $f=m+n-1$，但证明它对于不少学生来说是有困难的，原因是他们并未找到计数的方法.

教学中可提示学生观察一条对角线所穿过的小正方形与该对角线被纵、横网格线分成的线段之间的对应关系，启发学生将问题转化为：

一条线段被若干分点分成的段数问题予以解决. 也可引导学生在 5×4 的方格中(图 4－3)，通过 n 的变化，对角线位置的移动，发现计数规律：对角线到达 $x=1$ 的纵网格线时，穿过 1 个小正方形，到达 $x=2$ 的纵网格线时，穿过 2 个小正方形，… 到达 $x=5$ 的纵网格线时，穿过 5 个小正方形；对角线穿过 $y=1$ 的横网格线时，穿过的小正方形数加 1 个，对角线穿过 $y=2$，3 的横网格线时，穿过的小正方形数也都增加了 1 个.

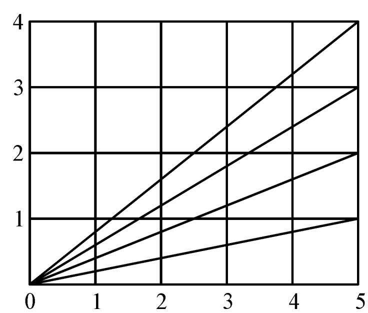

图 4－3

一般，对于 $m\times n$ 的矩形网格，由于对角线穿过 $x=0$ 到 $x=5$ 的纵网格线时，穿过了 m 个小正方形，对角线穿过 $y=1$，2，…，$n-1$ 的横网格线时，穿过的小正方形数都增加了 1 个，所以，$f=m+n-1$.

如图 4－4，还可以把对角线穿过的小正方形涂上灰色，如 5×3 时：

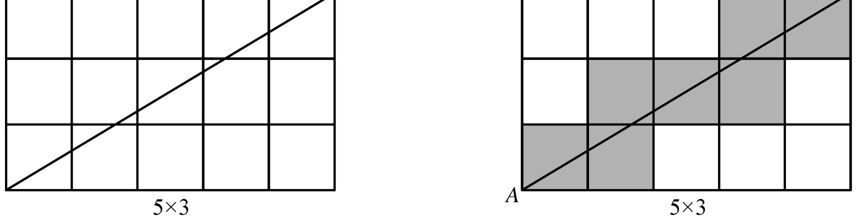

图 4－4

由于5和3互质，所以对角线穿过每个小正方形时，都相当于把起点A处的小正方形向上平移或向右平移1个单位，而它到达C点时，向上和向右总共平移了$(5+3-1)$个单位，因此$f=7$.

一般的，对于$m\times n$的矩形网格，把起点A处的小正方形向上或向右不断平移到C点处，向上和向右总共平移了$(m+n-1)$个单位，故

$$f=m+n-1.$$

在汇报交流对关系式$f=m+n-1$（m与n互质）的证明过程中，要让学生说明每步的推理依据，明确演绎推理的要求和其在证明中的价值，提高理性思维的水平.

证明$f=m+n-1$（m与n互质）时，无论采用哪种方法，都必须先明确，由于m、n互质，对角线与矩形内部的$m-1$，$n-1$条横、纵网格线都相交，且交点无一重合，亦即交点不是矩形网格内部的格点，对此可用反证法证明：

如图4-5所示，假设对角线经过矩形网格内部的格点(a, b)则有

$$\frac{b}{a}=\frac{n}{m},\ b=\frac{n}{m}a.$$

$\because$ m与n互质，

$\therefore$ $m\mid a$.

$\therefore$ $a=km>m$（k是自然数）.

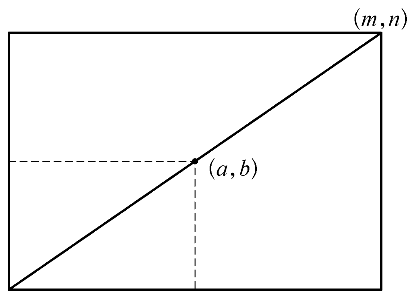

图4-5

这与$m>a$矛盾.

故对角线不经过矩形内部的格点.

鉴于学生的实际和《标准》对“证明”的要求，教学中可不要求学生对上面的结论作严格的证明，但要让学生清楚结论的由来和其在推导$f=m+n-1$过程中的作用.

对于m与n不互质时，f与m，n的关系式的探究，可放手让学生自行解决. 对此，若$m=ka$，$n=kb$（a，b互质，k是m，n的最大公因数）那么有

$$f=k(a+b-1)=m+n-k.$$

在活动的总结时，教师要引导学生回顾探究的过程和方法，注意揭示其中的数学思想方法的思维特点对所经历的数学活动进行反思提炼，积累从事探究活动的经验. 鼓励学生提出问题，进行延伸与拓展研究，培养解决问题的能力.

（三）问题出在哪？

（1）问题出在把重新拼成的图4-6当成矩形.

① 把图4-7放大后（方格一定画得准确），把图剪成四块，实际拼一下即可知.

② 剪成四块，即使不拼，可以算出四小块面积和是 $2\times\left(\frac{1}{2}\times3\times8\right)+2\left[\frac{1}{2}(3+5)\times5\right]=24+40=64$.

(2) 怎么证明拼不成矩形呢？至少有下面三种不同的证法.

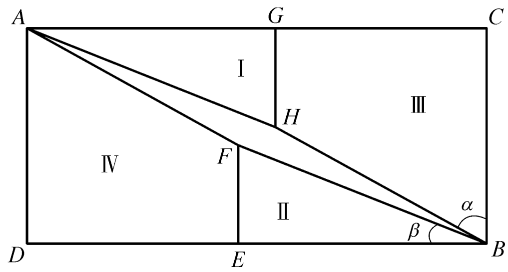

图 4-6

① 连接 AB，在 $\text{Rt}\triangle BDA$ 与 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中，$\frac{AD}{DB}=\frac{5}{13}$，$\frac{FE}{EB}=\frac{3}{8}$，$\frac{AD}{DB}\neq\frac{FE}{EB}$，

$\therefore \angle DBA\neq\angle EBF$，$\therefore$ BF 与 BA 不是在同一直线上.

② 在图中顶点 B 处，若大一点的锐角为 α，小一点的锐角为 β，由 $\tan\alpha=\frac{5}{2}$，$\tan\beta=\frac{3}{8}$，可算得 $\alpha=68.2°$，$\beta=20.6°$，$\alpha+\beta\neq90°$.

③ 把拼成图放在坐标系中. 顶点 B 坐标为(0, 0)，顶点 A 坐标为(5, 13). 于是过 A，B 两点的直线方程为 $13x-5y=0$. 把点 $H(2,5)$，$F(3,8)$ 分别代入方程，则有 $13\times2-5\times5=1>0$，$13\times3-5\times8=-1<0$，可知这两点分别在直线 AB 的两旁，可见中间有空隙.

(3) 拼图中间的空隙是一个平行四边形，这是因为 $AF=BH=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$，$AH=BF=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$. 连接 AB，$AB=\sqrt{13^2+5^2}=\sqrt{194}$.

根据秦九韶公式，可算得 $S_{\square AFBH}=2S_{\triangle ABH}=2\times\frac{1}{2}=1$.

(4) 我们知道，下面的数列：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …是著名的斐波那契(Fibonacci)数列. 用递推关系表示，可写成：

$$f_1=f_2=1,\qquad f_n=f_{n-1}+f_{n-2},\ (n>2)$$

用通项公式给出时，有 $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

这个数列有很多重要性质，其中一条是：

$$f_{n-2}\cdot f_n=f_{n-1}^2-(-1)^n.$$

这个“悖论”中的正方形和长方形边长的数字 3, 5, 8, 13，恰好是斐氏数列中相邻的各项，它们之间有 $5\times13=8^2+1$(上面公式中当 $n=7$).

有了上面这样的理性认识，类似的悖论可以根据下列诸等式中之一作出(可让学生实际做一做)：

$$5^2-3\times8=1,\ 13^2-8\times21=1,\ 34^2-21\times55=1,$$

或者

$$13 \times 34 = 21^2 + 1,\ 34 \times 89 = 55^2 + 1.$$

顺便讲一讲,若按照上面的办法把正方形剪拼成矩形(要求面积不变),应当如何剪裁?

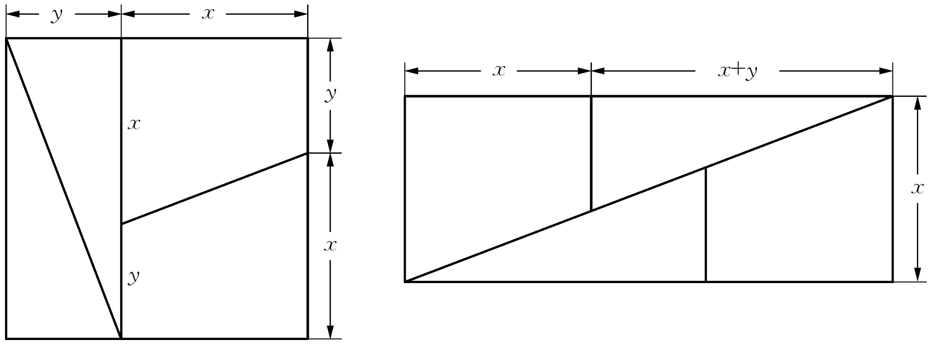

图 4-7

如图 4-7 所示,我们可有:

$$S_{正方形} = (x+y)^2,$$

$$S_{矩形} = (2x+y)x.$$

欲使 $S_{正方形} = S_{矩形}$,即 $(x+y)^2 - (2x+y)x = 0$,亦即 $x^2 - xy - y^2 = 0$.

两边同除以 y^2,有 $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$,解得

$$\frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

由于线段比应为正,所以取 $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 即为黄金分割.

故能实现上述完全剪拼的充要条件是 $x : y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

沪科版《数学》内容解读

——任课教师的教学参考资料